HACIENDA
SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO

Comparativo de Metodologías para el cálculo de Tablas de Mortalidad de Pensiones

CNSF
COMISIÓN NACIONAL DE SEGUROS Y FIANZAS

DGDI
DIRECCIÓN GENERAL DE DESARROLLO E INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas, la esperanza de vida ha aumentado significativamente y con ello, surgen mayores responsabilidades por parte del gobierno e inquietudes respecto al envejecimiento de la población, ya que éste genera mayores requerimientos financieras para los gobiernos y los proveedores de rentas vitalicias, y suscita serias inquietudes sobre la estructura futura de los sistemas de seguridad social, así como para la operación, solvencia y estabilidad financiera de las instituciones que manejan seguros y pensiones.

Para abordar esta clase de problemas se requieren métodos de pronóstico eficientes que reflejen el comportamiento de la mortalidad, por lo cual en la literatura actuarial y demográfica se han propuesto distintos métodos para capturar las tendencias de mortalidad de una población. Las tablas de mortalidad representan un elemento técnico básico para ello.

La graduación de las probabilidades de muerte q_x consiste en considerar un conjunto de principios y métodos por los que las probabilidades observadas se ajustan para proporcionar una base suavizada que permita hacer inferencias y cálculos prácticos de primas y reservas.

En el presente documento se presentan las bases teóricas para realizar dos procedimientos distintos que permitan revisar el ajuste de modelos estadísticos a datos de mortalidad.

El primer procedimiento ha sido utilizado por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) en anteriores publicaciones, dado que permite generar estimaciones precisas y confiables sobre la mortalidad con base en el Análisis Bayesiano de Modelos de Regresión Logística, definiendo el procedimiento para obtener pronósticos agregados para la siniestralidad o número agregado de muertes, además de describir el ajuste y recargo de los modelos con base en la información disponible, y cuyo producto final consiste en parámetros para la expresión analítica de los modelos, que permitan hacer frente a las obligaciones de seguros. En el primer capítulo de este documento se detalla dicho análisis.

Por otro lado, recientemente los cálculos actuariales han utilizado tablas de mortalidad proyectadas o dinámicas y se han criticado los modelos de predicción utilizados oficialmente por la sistemática sobreestimación de la mortalidad y falta de medidas de sensibilidad e incertidumbre de las características estimadas.

Como propuesta para subsanar lo anterior surgió el modelo de Lee-Carter, sencillo y robusto que combina un modelo demográfico de pocos supuestos con el análisis de series de tiempo, y supone una relación lineal entre el logaritmo natural de las tasas centrales de mortalidad, la edad y el tiempo, además de medir la incertidumbre asociada a la mortalidad mediante intervalos de confianza. Dicho modelo intenta ajustar los parámetros del modelo con los datos existentes y utilizar dichos valores ajustados para predecir valores futuros. El uso de tablas proyectadas mediante dicho modelo permite brindar estimaciones muy útiles en situaciones de incertidumbre y aplicar planificación exitosa de proyectos a futuro. Los aspectos teóricos de dicho modelo se detallan en el segundo capítulo del presente documento.

Información base para la aplicación de los métodos

Como se mencionó anteriormente, la modelización de los datos de mortalidad tiene gran relevancia, ya que es común analizar las estadísticas demográficas y los índices de mortalidad de ciertas poblaciones con el fin de estimar riesgos y cuantificar, por ejemplo, costos de seguros de vida; todo ello a partir de datos de mortalidad observados y tasas calculadas como el cociente entre población fallecida y población expuesta por edad.

Por ejemplo, podría resultar de interés analizar la mortalidad de la población de pensiones por invalidez de 1998 a 2015; como ya se ha mencionado, las variables relevantes son el número de expuestos y fallecimientos a edad alcanzada por sexo y tipo de pensionado.

Considerando los datos disponibles, se tendría una población a estudiar, concentrada alrededor de los 60 años, y mayormente en el sexo masculino, de la siguiente forma:

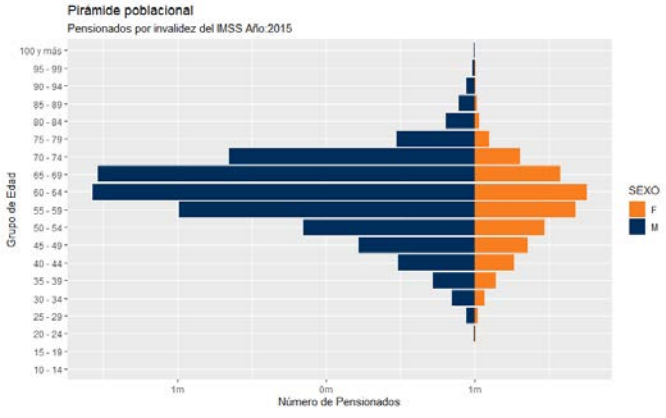


Figura 1

Para completar el análisis, se requeriría también contar con la información de los fallecimientos por año y grupo de edad, cuyo comportamiento se ejemplifica a continuación:

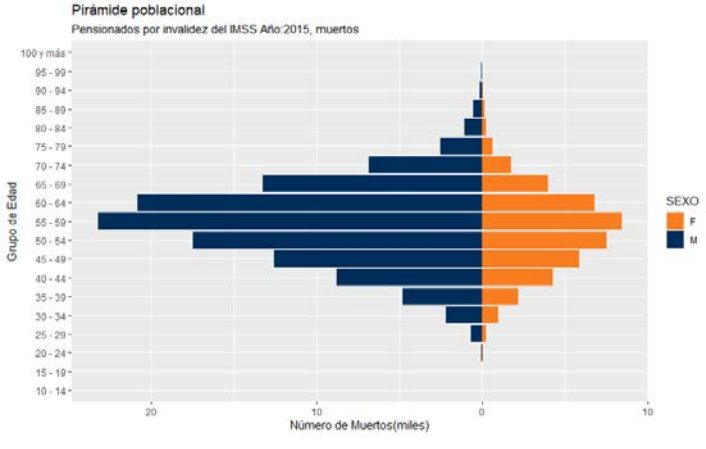


Figura 2

Teniendo clara la información básica necesaria, en los siguientes dos capítulos se detalla de manera teórica, el funcionamiento de ambos modelos.

1. Ajuste mediante Modelos de Regresión Logística

Para modelar las tasas de mortalidad mediante una regresión, tal como se comentaba en el apartado anterior, se requiere contar con la siguiente información para cada año:

- Expuestos a edad alcanzada en vigor al final del año.
- Fallecimientos ocurridos a edad alcanzada, durante el año.

Para obtener el patrón de expuestos al principio del año, necesario para el cálculo de las tasas de mortalidad (q_x), se crea una nueva variable sumando los expuestos al final del año, con los fallecidos de ese año para las edades correspondientes.

Es decir, si:

P_{x+1}: Pólizas o expuestos de edad $x+1$ al final del año,
d_x: Muertes de edad x observadas durante el año, y
E_x: Expuestos de edad x al principio del año,

Entonces,

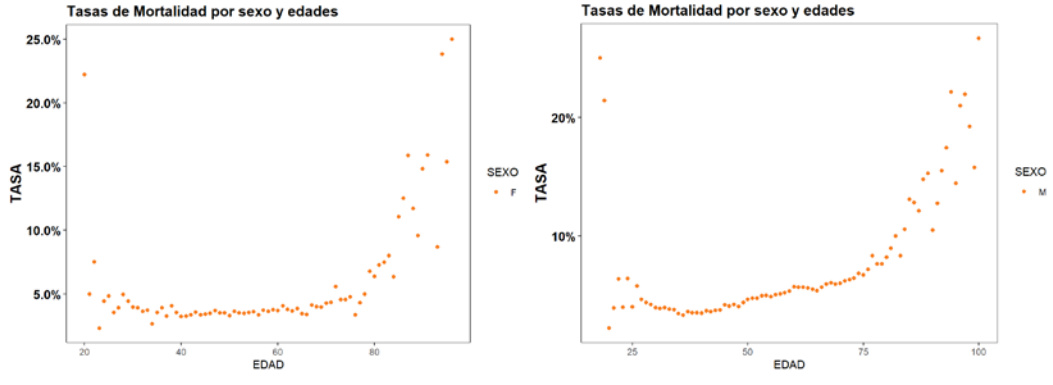
$$E_x = P_{x+1} + d_x$$

Así, las tasas brutas observadas de mortalidad (q_x) por ejemplo, para las edades 0 a 110, son:

$$q_x = d_x / E_x$$

Las tasas de mortalidad del ejemplo especificado en la sección de información base del presente documento, presentan un patrón no lineal como se muestra a continuación:

MUJERES **HOMBRES**



Se busca modelar sobre la nube de datos, una curva que describa la tendencia de aumento en las tasas conforme la edad aumenta, es decir, una distribución predictiva final conjunta para el vector de tasas q_x, que considere que a mayor edad existe mayor probabilidad de ocurrencia (muerte).

Cabe señalar que además de modelar la tendencia, resulta de interés cuantificar la magnitud de la variabilidad en las desviaciones asociadas a los datos de la mortalidad.

Para cada edad x, dado un número de expuestos al principio del año E_x, bajo los supuestos de independencia y homogeneidad, el número de muertes correspondientes, d_x puede ser modelado con una distribución Binomial con probabilidad de ocurrencia q_x, es decir:

$$P(d_x|E_x,q_x) \approx Binomial(E_x,q_x)$$

Se pretende describir la mortalidad que se puede observar en cada edad en un periodo anual, de modo que, dado un patrón de exposición descrito por E_x, se pueda pronosticar la cantidad futura d_x^* o, equivalentemente:

$$\hat{q}^*_x = d^*_x / E_x$$

Para efectos de protección frente a desviaciones extremas en la siniestralidad, el interés se concentra en el análisis predictivo sobre $\hat{q}^*_x$, la tasa de mortalidad observada futura.

Desde el punto de vista Bayesiano, se debe asignar una distribución de probabilidad a priori al parámetro desconocido q_x con el fin de obtener la distribución predictiva final del número futuro de muertos d^*_x; dado que la tasa de mortalidad observada futura es proporcional a d^*_x, la distribución predictiva para $\hat{q}^*_x$ se puede obtener directamente a partir de la anterior.

Ya que se pretende producir inferencias basadas en la información de los datos, se utiliza una distribución inicial de referencia para q_x.

Los resultados principales se muestran a continuación:

Función	Expresión	Modelo
Verosimilitud	$P(d_x \mid E_x, q_x)$	***Binomial***(E_x, q_x)
Inicial para q_x	$P(q_x)$	***Beta***$(0.5,0.5)$
Final para q_x	$P(q_x \mid d_x, E_x)$	***Binomial***$(d_x+0.5,\ E_x - d_x+0.5)$
Predictiva final para d_x^*	$P(d_x^* \mid d_x, E_x)$	***Beta-Binomial***$(d_x+0.5,\ E_x - d_x+0.5)$
Predictiva final para $\hat{q}_x^*$	Se obtiene directamente de la relación $\hat{q}_x^* = d_x^*/E_x$	

A partir de la distribución predictiva final para $\hat{q}^*_x$ se pueden construir, para cada edad, intervalos de probabilidad para las tasas observadas de mortalidad.

Como se había mencionado, además de contar con intervalos de predicción para las tasas de mortalidad observadas, se busca obtener una curva suave que describa la tendencia creciente de las tasas conforme la edad aumenta.

Los modelos de regresión permiten producir pronósticos y estudios de análisis estructural, al describir la relación entre la variable aleatoria de respuesta Y, y las covariables o variables explicativas X_j; $j=1, \ldots, k$. Un modelo de regresión normal se define como:

$$Y_i \sim Normal\ (\sum \beta_j X_{ij}, \sigma^2) \text{ independientes para } i= 1, 2, \ldots N$$

o en notación matricial:

$$Y \sim Normal\ (X\beta, \tau I)$$

Donde X representa a la matriz ($Nx2$) de covariables, β (2x1) el vector de coeficientes y $\tau = 1/\sigma^2$, la precisión común.

Sin embargo, las tasas de mortalidad no exhiben una tendencia lineal y se encuentran en el intervalo (0,1), mientras que la distribución Normal tiene como soporte toda la recta real, de modo que resulta necesario aplicar una transformación a las tasas para tener un ajuste razonable.

Para enfrentar ambas limitantes, puede utilizarse una transformación logística de las tasas observadas, utilizando la función *logit*:

$$\text{logit}\ (p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \log(p) - \log\ (1-p)$$

con p entre 0 y 1.

Esto nos lleva a la aplicación de una Regresión Logística, mediante la cual se analizan datos que presentan una distribución Binomial, donde los números de ensayos Bernoulli son conocidos y las probabilidades de éxito desconocidas; el modelo se obtiene en base a lo que cada ensayo y el conjunto de variables explicativas puedan informar sobre la probabilidad final, modelando los *logits* de las probabilidades binomiales como una función lineal.

La variable respuesta resultante queda definida por la siguiente expresión:

$$Y = \ln\left(\frac{\hat{q}}{1 - \hat{q}}\right)$$

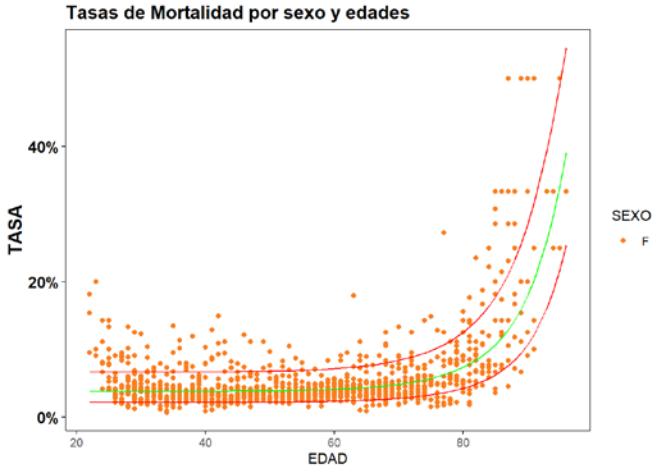
Con los datos transformados se ajusta un modelo de regresión lineal Bayesiano, donde se determina la distribución predictiva conjunta para el vector Y dado el vector de edades x.

El modelo se ajusta una vez aplicada la transformación, sin embargo, lo que se busca es ajustarlo para las tasas de mortalidad observadas, por lo que se puede regresar al modelo original mediante la siguiente transformación:

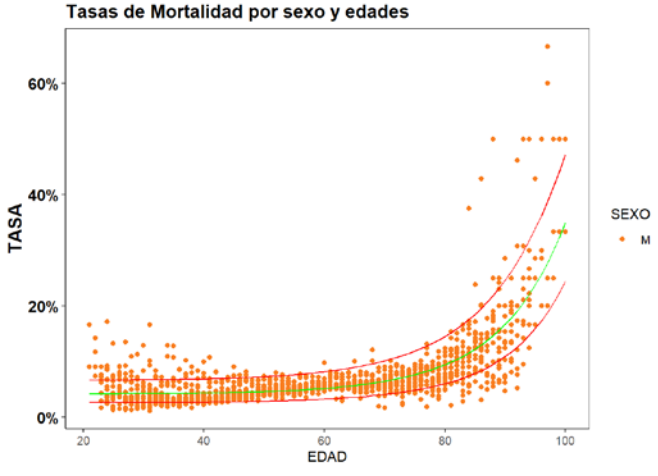
$$q = \left(\frac{\exp(Y)}{1 + \exp(Y)}\right)$$

Para los datos del ejemplo el modelo quedaría de la siguiente forma:

MUJERES



HOMBRES



Cabe señalar que, como se mencionó, el análisis Bayesiano requiere asignar distribuciones iniciales para parámetros desconocidos. Nuevamente se utilizan distribuciones de referencia. Si Z representa la información aportada por los datos, $\hat{\beta}$ y $\hat{\tau}$ representan los estimadores de máxima verosimilitud de β y τ respectivamente, y Y^* el vector asociado a la matriz X^* sobre el cual se quieren realizar pronósticos, se obtienen las distribuciones que se presentan en la siguiente tabla:

Función	Expresión	Modelo
Verosimilitud	$P(Y \mid \beta, \tau)$	***Normal*** $(X\beta, \tau I)$
Inicial para (β, τ)	$P(\beta, \tau)=P(\beta \mid \tau)\, P(\tau)$	$P(\beta, \tau) \propto \tau^2$
Final para (β, τ)	$P(\beta,\tau \mid Z)=P(\beta \mid \tau,Z)P(\tau \mid Z)$	***Normal*** $(\hat{\beta}, \tau(X^tX))$ ***Gamma*** (a, b)
Predictiva conjunta final para $\boldsymbol{Y}^*$	$P(\boldsymbol{Y}^* \mid \boldsymbol{X}^*,Z)$	***Student Multivariada*** con $\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}^* \mid \boldsymbol{X}^*,Z) = \boldsymbol{X}^* \hat{\beta}$ y, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{Y}^* \mid \boldsymbol{X}^*,Z) = \hat{\tau}^{-1}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{*t} + \mathbf{I})$ y N grados de libertad

Además, se sabe que una variable aleatoria t de Student converge en distribución a una Normal si el número de grados de libertad tiende a infinito; si dicho supuesto ocurre con los datos utilizados, el resultado del ajuste Bayesiano se puede resumir con la distribución predictiva – aproximada:

$$P\,(Y^*|X^*, Z) = N\,(X^* \hat{\beta}\,, \hat{\tau}^{-1}\,\{X^*\,(X^tX)^{-1}X^{*t}+I\})$$

La transformación inversa que se aplica para regresar a la escala de las tasas de mortalidad observadas no preserva valor esperado, sin embargo, la mediana y cuantiles, sí se preservan.

Entonces, el cuantil a nivel de la distribución predictiva para las tasas observadas se obtiene de manera directa al transformar el correspondiente cuantil de la distribución $P\,(Y^* \mid X^*, Z)$. Ello soluciona el problema de sobrecargar apropiadamente una tabla de mortalidad buscando obtener la correspondiente tabla modificada.

De ese modo, la curva definida por los cuantiles del mismo orden, digamos α, de las distribuciones predictivas marginales de las tasas observadas tiene la propiedad de que, sea cual sea la edad de interés, la probabilidad de observar para ese grupo de edad una tasa de mortalidad superior a la indicada por la curva es 1-α. A esta curva se le denominará en lo sucesivo modelo modificado de nivel α. Esta metodología produce modelos que ofrecen protección frente a desviaciones extremas en la siniestralidad que son cuantificados en forma precisa con argumentos probabilísticos.

Por otro lado, la frecuencia con la que se presentan las diferentes edades en una población no es homogénea; por ello, es conveniente que el nivel de protección de los modelos modificados se fije respecto a un perfil concreto de exposición.

Para ello, se puede recurrir al pronóstico del número agregado de muertes correspondiente a un nivel de mortalidad y un patrón de exposición por edades. El pronóstico del número agregado de muertes (o suma de siniestros) corresponde a la previsión del número de reclamaciones que deben ser pagadas durante un año bajo un esquema de un seguro temporal a un año para cierto patrón de asegurados expuestos.

Para un patrón de tasas de mortalidad $\{q_x;\ x=0, \ldots, 110\}$ y un patrón de asegurados expuestos al principio del año $\{E_x;\ x=0, \ldots, 110\}$, el número esperado de la suma de siniestros (SS) que se observarán durante el año se puede obtener a partir de la siguiente relación:

$$SS = \sum_x E_x\, q_x$$

Si el patrón de asegurados expuestos está fijo, la variabilidad asociada al pronóstico de la suma de siniestros proviene de la incertidumbre que se tiene sobre las tasas de mortalidad.

Así, la distribución predictiva posterior para la suma de siniestros observados depende y puede ser derivada de la distribución predictiva final conjunta de $\hat{q} = (q^*_{12}, q^*_{13}, \ldots, q^*_{99})^T$ que, a pesar de no contar con una forma analítica cerrada puede obtenerse fácilmente vía simulación. Como se mencionó anteriormente, la distribución predictiva conjunta de $Y^* = (Y_{12}, Y_{13}, \ldots, Y_{99})^T$ se puede aproximar satisfactoriamente con una normal multivariada tal que

$$E(Y^*|X^*) = X^* \hat{\beta} \quad \text{y} \quad Var\,(Y^*|X^*) = \hat{\sigma}^2 (I + X^*(X^TX)^T X^*)$$

donde X^* incluye las edades sobre las cuales se quiere pronosticar, en este caso $\beta = (\alpha, \beta)^T$ es el vector de parámetros del modelo, σ es el parámetro de escala de la función de verosimilitud de Y y X es la matriz de diseño del modelo.

Con el fin de contar con una muestra de la distribución predictiva de las tasas observadas de muerte $\hat{q}^*$, se simulan observaciones del vector Y^* a partir del modelo ajustado y se utiliza la transformación inversa $\hat{q}^* = \left(\frac{\exp(Y^*_x)}{1 + \exp(Y^*_x)}\right)$ aplicada a cada entrada del vector. De esta manera, cada simulación representa un posible patrón de tasas de mortalidad a observarse en el periodo de estudio.

Finalmente, se multiplica cada simulación de $\hat{q}^*$ por el patrón de expuestos por edad, para obtener una muestra de la distribución predictiva de los siniestros agregados observados. Con una muestra suficientemente grande se obtiene una aproximación a la distribución verdadera que permite tener conclusiones prácticamente exactas acerca de todas sus características, por ejemplo, la media, la varianza y los cuantiles, entre otras.

Para cualquier modelo modificado, por ejemplo, de nivel α, es posible calcular el respectivo pronóstico de siniestros agregados observados. Este valor puede contrastarse con la distribución predictiva para establecer la probabilidad de observar un número de siniestros agregados aún más extremo. Por ejemplo, si el valor obtenido coincide con el cuantil $1-p$ de la distribución de SS se puede concluir que al utilizar un modelo modificado de nivel α se tiene una probabilidad p de que el número de muertes agregadas observadas será mayor al pronosticado por el modelo. En otras palabras, el modelo modificado de nivel α se identifica con el Valor en Riesgo de nivel $1-p$ en la distribución predictiva del número de siniestros agregados observados.

Además de su uso para la selección del modelo modificado, la distribución predictiva de la suma de siniestros resulta útil para medir qué tan bien calibrado se encuentra el modelo propuesto. Por construcción, la media de la distribución de SS coincide con el pronóstico que se puede obtener con el vector correspondiente a la media de la distribución conjunta de q^*, y un modelo en el cual la media de la distribución de SS coincida, a su vez, con el número observado de siniestros se considera bien calibrado.

La falta de calibración en un modelo puede deberse a la presencia de observaciones atípicas o influyentes que introduzcan sesgos. Estas desviaciones son difícilmente percibidas al comparar dos curvas en la escala de las q_x, sin embargo, un análisis de los siniestros pronosticados para cada edad y de siniestros agregados permite observarlas más claramente.

De esta manera, para calibrar el modelo, se calcula la media de la distribución simulada de los siniestros agregados, la cual se compara con el número de siniestros observados y, mientras menor sea la diferencia entre ambas cantidades, el modelo se considera como mejor calibrado. Es importante señalar que el hecho de que un modelo esté bien calibrado no es la única consideración relevante. También debe ponerse atención a la estimación de la varianza del modelo, ya que un modelo con varianza pequeña podría describir bien los datos, pero también llevar a bandas de pronóstico o cuantiles que podrían subestimar la magnitud de las desviaciones extremas con el consecuente efecto en la protección.

2. Análisis basado en el modelo de Lee-Carter

Uno de los enfoques más destacados por su eficiencia y transparencia para capturar las tendencias de mortalidad de una población y su modelización estocástica, es el método propuesto por Lee y Carter (1992); con sus variantes y extensiones, dicho modelo ha inspirado a muchos autores a introducir métodos más sofisticados al incluir parámetros adicionales.

Dicho modelo es básicamente un método extrapolativo estocástico para la proyección de las mejoras en la mortalidad, el cual combina series de tiempo para ajustar exponencialmente las tasas de mortalidad decrecientes. Su componente principal es la tasa de mortalidad, dependiendo de factores relacionados con la edad y el tiempo.

El modelo consiste en ajustar a la medida de mortalidad la función:

$$q_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt})$$

Y puede ser expresado equivalentemente, de la siguiente forma:

$$\ln(q_{xt}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt}$$

Siendo:

α_x: Parámetro independiente del tiempo que indica el patrón constante de una edad específica de mortalidad.

β_x: Parámetro que mide la tendencia de la mortalidad en el tiempo; determina cuánto cambia cada grupo de edad conforme cambia k_t. Cuando k_t es lineal en el tiempo, cada grupo de edad cambia a su propia tasa exponencial, aunque esto no es un requisito del modelo.

k_t: Parámetro que mide las desviaciones del cambio en la mortalidad a través del tiempo para una edad específica.

$\varepsilon_{x,t}$: Término de error; refleja todos aquellos efectos de edad y periodo no capturados por el modelo, distribuidos $N(0,\sigma^2)$ por la edad y el tiempo.

Para poder obtener una única solución para el sistema de ecuaciones del modelo deben considerarse las siguientes restricciones:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \beta_x^{(1)} = 1$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0$$

El modelo estándar de Lee-Carter puede ser estimado usando la descomposición en valores singulares (SVD por sus siglas en inglés), una importante técnica para la descomposición de matrices. Dicho método esencialmente aproxima una matriz como el producto de dos vectores, basado en el hecho de que toda matriz $A \in R^{m \times n}$ con $m>=n$, que puede o no ser cuadrada o simétrica, tiene una factorización de la forma $A = UDV^T$, teniendo $U \in R^{m \times n}$ columnas ortogonales y siendo $V \in R^{m \times n}$ una matriz ortogonal y D una matriz diagonal (nxn), y lo cual lleva al siguiente estimador de los efectos de edades específicas:

$$\overline{\alpha_x} = \frac{1}{n} \sum_{t=t_1}^{t_n} log\,(\bar{q}_{xt})$$

El cual minimiza el término de la suma de errores al cuadrado $S = \sum_{xt} \varepsilon_{xt}^2$.

Lee y Carter también realizaron algunos ajustes a las estimaciones $\bar{k}_t$ para asegurar que, en cada año, el total de muertes predichas por el modelo fuera igual al total de muertes observadas $\sum_x y_{xt}$.

El modelo original fue reevaluado y se propuso que sus parámetros pudieran ser estimados por métodos de máxima verosimilitud basados en la elección de la distribución del error, asumiendo que el número de muertes para una edad y periodo específico, eran realizaciones independientes de una distribución Poisson con parámetros:

$$E[Y_{xt}] = e_{xt}\, \mu_{xt}$$

$$Var[Y_{xt}] = \Phi\, E[Y_{xt}]$$

Siendo Φ una medida de sobre-dispersión, para permitir la heterogeneidad (por ejemplo, en el caso de pólizas duplicadas en datos de seguros).

El modelo básico de Lee-Carter puede además extenderse para incluir un término bilineal adicional, conteniendo un segundo efecto de período o un efecto de una cohorte (propuesto por Renshaw y Haberman en 2006); dicho modelo básico puede ser transformado en un esquema más general que permita analizar la relación entre el tiempo y la edad, y el impacto conjunto que tienen sobre las tasas de mortalidad, reflejando de forma clara los cambios generacionales (efecto cohorte).

Así, puede considerarse un esquema de modelización APC (age-period-cohort) y el ajuste del modelo con la metodología propuesta por Renshaw y Haberman (2006), que especifica la fuerza de la mortalidad con una estructura generalizada escrita de la forma:

$$\mu_{xt} = e^{\alpha_x + \beta^0_{xt} l_t - x + \beta^1_x k_t}$$

Donde

α_x mapea el perfil principal de mortalidad.
l_t y k_t representan efectos de cohorte y período, respectivamente.
β_0 y β_1 miden las correspondientes interacciones con la edad.

En general, esta familia de modelos es parte de métodos extrapolativos estocásticos que asumen que las tendencias históricas de las mejoras en la mortalidad humana persistirán en el futuro. La segunda característica distintiva del enfoque de Lee-Carter es que, habiendo reducido la dimensión temporal de la mortalidad a un solo índice k_t, utilizan métodos estadísticos de series de tiempo para modelar y pronosticar este índice, el cual se comporta como una caminata aleatoria con deriva:

$$K_t = k_{t-1} + d + e_t$$

La varianza de kt aumenta con el horizonte de pronóstico t:

$$Var(k_t) = (t - t_0)\, v$$

Lo anterior es importante porque da el error estándar de un pronóstico; el pronóstico de las tasas de mortalidad en el caso de la familia de modelos Lee-Carter se basa en el tiempo; la predicción en serie de los parámetros dependientes del tiempo del calendario ($l_{t\ x}$; k_t) se puede escribir como sigue:

$$\dot{\mu}_{x,\ t_n+s} = exp\,(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x^{(0)} i_{\ t_n+s-x} + \hat{\beta}_x^{(1)} \dot{k}_{\ t_n+s}),\ s>0$$

Donde:
i_{t_n+s-x} y $\dot{k}_{t_n+s}$ representan los efectos de cohorte y período pronosticados, respectivamente. En el caso de efectos de cohorte, los valores pronosticados vuelven a los parámetros (i.e. $i_{t_n+s-x} = \hat{i}_{t_n+s-x}$) siempre que el horizonte de pronóstico se encuentre dentro del rango de datos disponibles (i.e. $\forall\ s \leq x - x_1$).

Este método de pronóstico nos permite generar valores promedio futuros y evaluar la variabilidad futura de las tasas centrales de mortalidad. A su vez, la variabilidad de las predicciones se puede aplicar para medir la incertidumbre en el riesgo de longevidad.

Como se mencionó, en el enfoque de modelado tipo Lee-Carter, se supone que los efectos de la edad son constantes en el tiempo y el período variable en el tiempo y / o los efectos de cohorte se proyectan hacia adelante usando modelos de series de tiempo autorregresivos.

Así, los factores de período y / o cohorte son extrapolados en el tiempo por un proceso ARIMA estocástico (por ejemplo, caminata aleatoria con deriva) para hacer pronósticos

de la fuerza futura de la mortalidad e, implícitamente, la esperanza de vida futura (basada en períodos y cohortes); una vez estimados los parámetros con la trayectoria pasada, se trata de encontrar un modelo autorregresivo que permita proyectar las tasas suponiendo constante la estructura de mortalidad obtenida.

Los procesos ARIMA (Auto-Regressive Integrated Moving Average) univariados, caracterizados por tres parámetros (*p; d; q*). El tipo de modelo ARIMA utilizado depende del perfil del parámetro dentro del rango de datos disponibles (por ejemplo, el tamaño de las desviaciones de la media, el grado de estacionariedad, etc.). En la mayoría de las aplicaciones de este modelo, el paseo aleatorio con deriva (*0,1,0*) es la elección habitual para los efectos del período (kt), que puede expresarse como:

$$K_t = k_{t-1} + d + e_t$$

Donde d mide la deriva en forma de desviaciones medias anuales y e_t representa el ruido blanco en el proceso estocástico.

Un ARIMA (*0,1,0*) es una opción razonable en los casos donde hay una tendencia lineal estable en las mejoras anuales de la mortalidad, pero es inadecuado para los casos caracterizados por cambios dinámicos regulares en la pendiente (es decir, no lineales). Sin embargo, este modelo ha funcionado bien en muchas grandes aplicaciones de datos, incluso cuando un modelo más complejo podría haber sido indicado por la forma de los efectos del período.

Para la aplicación de estos modelos, pueden usarse los errores de Poisson. La estimación general de esta clase de estructuras de modelo procede con un algoritmo iterativo que minimiza la función de desviación, haciendo un proceso cíclico de actualización de los parámetros estimados hasta que la diferencia mínima entre la verosimilitud del modelo ajustado y la verosimilitud del modelo saturado se alcance. Además, el mecanismo de actualización para un parámetro θ se obtiene por el método de minimización de Newton-Raphson aplicado a la función de desviación, lo que puede ser expresarse como:

$$u(\overline{\theta}) = \overline{\theta} - \frac{\frac{\delta D}{\delta \theta}}{\frac{\delta^2 D}{\delta \theta^2}}$$

Si observamos la estructura de la función de desviación con estructura de error Poisson, observamos que:

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = \sum \frac{\partial\, dev}{\partial \theta} = \sum 2wa(\hat{y}-y)$$

Donde

$$\hat{y}' = \frac{\partial \hat{y}}{\partial \theta}$$

Implica que:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha x} = \hat{y}$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \beta x} = k_t \hat{y} = \alpha \hat{y}$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial k_t} = \beta_x \hat{y}$$

Tal que

$a = 1$

$a = k_t$

$a = \beta_x$

Y w = Es un conjunto de pesos tales que w = 1 está asignado a cada celda no vacía y w = 0 en caso de que sea vacía.

Haciendo uso de las notaciones simplificadas anteriores, podemos expresar la segunda derivada parcial de la función de desviación como:

$$\frac{\delta^2 D}{\delta \theta^2} = \sum 2wa\overline{y}' = \sum 2wa^2\overline{y}'$$

Sustituyendo en la ecuación principal las dos igualdades obtenidas:

$$u(\overline{\theta}) = \overline{\theta} - \frac{\sum 2wa(\hat{y}-y)}{\sum 2wa^2\overline{y}'} = \overline{\theta} + \frac{\sum 2wa(\hat{y}-y)}{\sum 2wa^2\overline{y}'}$$

La misma regla de actualización puede determinarse en caso de modelos con estructuras de errores de Poisson y Gaussianos.

En la incorporación de este modelo ARIMA, al modelo general de proyección de la mortalidad, se encuentra implícita la idea de que se espera que el nivel de la mortalidad quede explicado mayormente por la experiencia pasada (en particular, por la inmediatamente anterior, y no de manera determinante por factores explicativos externos), y así continúe esa tendencia.

Finalmente, a partir de lo anterior es posible construir una tabla de vida completa a partir de las tasas de mortalidad específicas por edad, utilizando técnicas estándar.