Premio de

INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN en SEGUROS y FIANZAS

Antonio Minzoni Consorti

2016

Aproximación a curvas de mortalidad a través de una propuesta no paramétrica: el caso del modelo de Heligman y Pollard (HP)

Trabajo presentado para el Premio de Investigación e Innovación en Seguros y Fianzas 2016, Antonio Minzoni Consorti

Act. José Adrián Ovín Ávila

Dr. José Eliud Silva Urrutia

"Querida Zita"

TERCER LUGAR

Categoría de Investigación en Seguros

SHCP
SECRETARÍA DE HACIENDA Y CRÉDITO PÚBLICO

COMISIÓN NACIONAL DE SEGUROS Y FIANZAS
CNSF

Seudónimo:

Querida Zita

Título del trabajo:

Aproximación a curvas de mortalidad a través de una propuesta no paramétrica: el caso del modelo de Heligman y Pollard (HP)

Categoría a la cual se inscribe:

Investigación en Seguros

Aproximación a curvas de mortalidad a través de una propuesta no paramétrica: el caso del modelo de Heligman y Pollard (HP)

Autores: Querida Zita

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una manera de aproximar curvas de mortalidad, a partir tanto de un enfoque no paramétrico como por la medición de la suavidad alcanzada en trabajos previos, con un particular énfasis en aquella generada a través del modelo de Helligman y Pollard (HP) (1980). Con tal enfoque, se evidencian algunas ventajas, donde para el modelo HP, se prescinde de estimar ocho parámetros, proporcionar valores iniciales para cada uno de ellos y utilizar optimización no lineal. En general la propuesta proporciona, no tan solo una estimación puntual, sino que también dota de una estimación por intervalo y se emplea un solo parámetro. Éste se vincula con el hecho de estimar tendencias de series de tiempo, con suavidad controlada, técnica propuesta por Guerrero (2008). Las ideas centrales del trabajo consisten en hacer comparativos con estimaciones previas y encontrar la suavidad asociada a la estimación hecha en cada una de 42 series de mortalidad publicadas y seleccionadas. La forma de realizar la aproximación es a través de suavizar de manera controlada caso por caso los datos observados tal que su tendencia se aproxime lo más posible a la curva de mortalidad producida por el modelo de HP, a través del uso de funciones de pérdida. Así es factible inferir el rango de valores del parámetro de suavizamiento que aproxima tal tendencia, con lo que el analista tiene elementos para imponer suavidades a nuevos datos objeto de estudio. En los ejemplos utilizados con el modelo HP, se enfatiza en las edades de 12 años en adelante, donde los resultados de las estimaciones se presentan y se comparan. Se observa un mejor ajuste en la mortalidad masculina sobre la femenina y se comenta acerca de los valores de los parámetros de suavizamiento obtenidos útiles para posteriores estimaciones. De este modo se proporciona al analista un rango de referencia de los parámetros de suavizamiento para obtener aproximaciones similares a las estimaciones que se generan al aplicar el modelo HP.

Palabras clave: Modelo de Heligman y Pollard, suavidad, parámetro de suavizamiento, tendencias, curva de mortalidad, mínimos cuadrados generalizados.

1. Introducción

El inicio de la modelación del riesgo de mortalidad o en breve de las llamadas curvas de la mortalidad es bastante antiguo. De los modelos famosos se tienen, entre otros, los de: Moivre (1725), Gompertz (1825, 1860 y 1862) y Makeham (1867 y 1890). Más adelante se fueron afinando tales propuestas donde se sugirió la incorporación de patrones cada vez más específicos y característicos de las distintas etapas de la vida humana, como se hace originalmente en Thiele (1871), idea que se retoma en los modelos desarrollados por Helligman y Pollard (1980). En Forfar (2006) se hace un amplio recorrido cronológico de las diversas propuestas existentes en la literatura en cuanto a curvas (leyes) de mortalidad. De ellos, el de Heligman y Pollard (HP) (1980), además de ser útil para la graduación, entre varias aplicaciones, ha sido empleado para analizar o predecir el comportamiento de la mortalidad futura. Por ejemplo, en Felipe et al (2002) se realiza un estudio de la evolución de los parámetros del modelo HP con modelos ARIMA y se pronostica el comportamiento para la población de España. También se ha recurrido al modelo para medir el impacto de algunas enfermedades, donde por ejemplo se analiza la mortalidad en África en la detección de cambios en las edades jóvenes, *la joroba*, debido a los efectos del VIH (Sharrow et al, 2013). En Hartmann (1987) y Yuen (1997) se lleva a cabo una comparación entre diferentes modelos para ajustar la mortalidad y se concluye que HP (1980) proporciona un mejor ajuste. Por otra parte, Kostaki (1991), Irwanati (2008) y Syahmi (2015) han utilizado esta herramienta para crear tablas de mortalidad con datos agregados.

El modelo de HP tiene diferentes formas de estimarse, una posibilidad es por medio de optimización no lineal y otra es a través de técnicas bayesianas. Se considera que para tal efecto, se requiere de una capacidad de computo considerable, así como conocimiento de herramientas teóricas que permitan su estimación con el fin de facilitar la convergencia del modelo, al igual que tener acotados intervalos y la distribución para los parámetros, como aquellos propuestos por Sharrow et al (2013), es decir, $A \sim U[0,0.25]$, B y $C \sim U[0,1]$, $D \sim U[0,0.25]$, $E \sim U[0,20]$, $F \sim U[15,55]$, $G \sim U[0,0.01]$ y $H \sim U[1,1.5]$. La relevancia de los rangos de referencia de dichos parámetros resulta orientativa para intentar la estimación del modelo, sin embargo la decisión de estimar o no el modelo con datos propios, dada la estructura del mismo, puede no resultar atractivo por las exigencias técnicas que ello implica.

En este trabajo se propone utilizar una técnica no paramétrica que se desarrolló en el contexto de suavizar series de tiempo de manera controlada, técnica propuesta por Guerrero (2008), en donde se impone un índice de suavidad (o porcentaje de suavidad o suavidad) y a partir de él se estima una tendencia. Cabe mencionar que tal índice se sustenta en el filtro de Hodrick y Presocott (1997). A pesar de que este filtro ha tomado una gran aceptación en el campo de la economía en el marco de series de tiempo, en tópicos actuariales se puede aplicar pues los valores de las q_x observadas se distribuyen, según la captación de ellos, igualmente espaciados en el tiempo. Es importante reconocer que en la propuesta existen problemas en aproximar la curva de HP en las *colas*, esto es: no se logra un ajuste "idóneo" tanto al inicio como al final de la curva de mortalidad. Así pues, se entiende en el trabajo como términos equivalentes: *tendencia y curva de mortalidad*. Se emplean estimaciones provenientes de Kostaki (1991), Felipe et al (2002), Jos (2014) y HP (1980).

Se considera que la relevancia de este trabajo radica en que algún analista interesado en estimar curvas de mortalidad, con no mucha holgura de tiempo y con una formación estándar en la profesión actuarial, pueda realizarlo de una manera sencilla y expedita en términos de la aproximación aquí propuesta, con los beneficios agregados señalados, donde desde luego sería valioso que tales estimaciones sean refinadas o complementadas con las de otros modelos actuariales. En principio este tipo de herramientas no sólo es útil para analizar series económicas, sino que por su objetividad se verifica en este trabajo que también lo es en tópicos actuariales. Como menciona el autor, la necesidad de estimar la tendencia para fines informativos de una serie de tiempo es de suma importancia para cualquier tipo de análisis, y, puede ser apoyado desde la gráfica de los datos. En breve, se considera que lo aquí expuesto abona adicionalmente a la parte exploratoria de curvas de mortalidad.

El trabajo está organizado como sigue. En la segunda sección se enmarca el modelo HP, así como algunas de sus variantes. En la tercera sección se aborda la estimación de tendencias de mortalidad a través de la técnica de suavizamiento controlado. En el cuarto apartado se exponen ejemplos y comparativos en la aplicación del llamado índice de suavidad con estimaciones previamente elaboradas y se señala la manera de aproximar las curvas elaboradas mediante HP de los artículos seleccionados. Posteriormente se exponen aplicaciones diversas con la presentación de los patrones observados en funciones de pérdida, el comportamiento del parámetro de suavizamiento, se hace una ilustración de las aproximaciones y se exponen tablas resumen de los resultados obtenidos. Finalmente se señalan las principales conclusiones derivadas de la elaboración del trabajo.

2. El modelo de Heligman y Pollard (HP)

El modelo es utilizado en la literatura actuarial para estimar la mortalidad de una población. En el artículo seminal de 1980, se presentan distintas expresiones matemáticas que generan las correspondientes curvas de mortalidad basadas en la siguiente propuesta

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\log x - \log F)^2} + GH^x \tag{2.1}$$

donde q_x es la probabilidad de morir durante un año de una persona a edad x y $p_x = (1 - q_x)$ y los parámetros a estimar resultan ser $A, B, C, \dots, H$. La naturaleza de la ecuación no permite valores mayores a 1 ni menores que 0. La curva está compuesta por tres términos que poseen interpretaciones demográficas. El primer sumando representa la caída rápida de la mortalidad infantil y requiere tres parámetros. El segundo término ajusta una curva que se asemeja a la distribución log-normal. En tanto que el último sumando está basado en la función de Gompertz. En HP (1980) y Sharrow et al (2013) se proporciona una descripción detallada de la interpretación de cada uno de los parámetros desde un punto de vista demográfico.

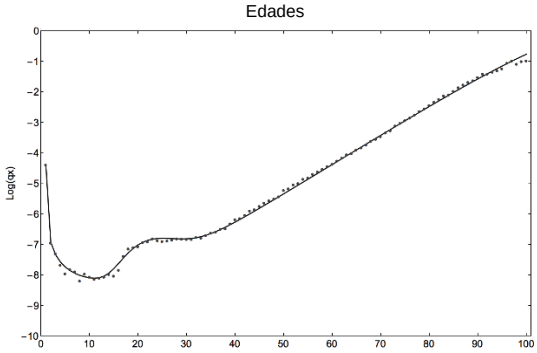
De la ecuación (2.1), en HP (1980) se proponen otras expresiones de la curva de mortalidad, que se presentan de manera reducida y en donde solo se expresa el valor de q_x. Dos de las mismas curvas, son las siguientes

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\log x - \log F)^2} + \frac{GH^x}{1+GH^x} \tag{2.2}$$

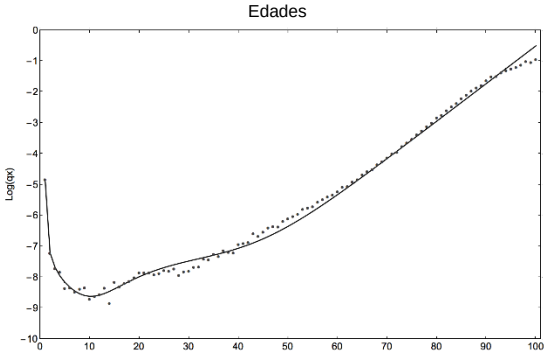
$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\log x - \log F)^2} + \frac{GH^x}{1+KGH^x} \tag{2.3}$$

La ecuaciones (2.2) y (2.3) presentan una diferencia en el tercer sumando, la cual aparece al eliminar el cociente del lado izquierdo de (2.1). Como lo menciona HP (1980), ambas formas presentan un mejor ajuste en la *joroba* de accidentes y en edades avanzadas. En este trabajo se utiliza la respectiva expresión, en función de lo que fue elegido en cada una de las fuentes bibliográficas elegidas y consultadas para este fin. Algunos ejemplos de las curvas estimadas con sus valores observados de q_x , en escala de logaritmo natural, se presentan a continuación en la Figura 2.1.

(a)



(b)



(c)

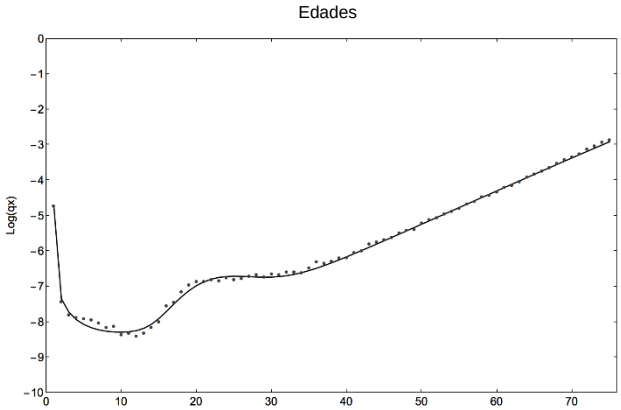


Figura 2.1 (a) España Hombres 1982, (b) España Mujeres (1985), (c) Suecia Hombres 76-80.

De acuerdo con Dellaportas et al. (2001), Debón, Montes y Sala (2006), y Congdon (1993), el modelo HP tiene algunos inconvenientes:

• Los errores estándar para las estimaciones de los parámetros son muy grandes, cuentan con una alta correlación entre ellos;

• se tienen dificultades cuando se estima el parámetro *K*, que en muchas ocasiones resulta insignificante y que imposibilita la estimación del modelo;

• no siempre se logra la convergencia en rutinas iterativas de estimación no lineal;

• las correlaciones entre los parámetros del modelo HP son altas, especialmente entre *A y B, A* y *C, B* y *C, G* y *H*, en ambos sexos, *G* y *K, H* y *K* para hombres.

3. Estimación de curvas de mortalidad con suavizamiento controlado

Al analizar series de tiempo se puede llegar a distintas formas de interpretar los datos. Una de ellas es considerar una serie de tiempo cualquiera, como la suma de una tendencia no observable, pero sí subyacente, que varía dinámicamente a lo largo del tiempo. adherida a un componente aleatorio, es decir,

$$y_t = \tau_t + \eta_t, \qquad t = 1, \dots, N \tag{3.1}$$

donde τ_t es la tendencia, η_t es el componente aleatorio y N el número de datos. Existen otras técnicas para calcular la tendencia de una serie de tiempo, como pueden ser por ejemplo, promedios móviles, suavizamiento exponencial, regresión no paramétrica, entre varias. Todos los métodos anteriores funcionan aplicando filtros a las series $\{y_t\}$ dando como resultado otra serie $\{\hat{\tau}_t\}$, es decir la tendencia estimada. Este tipo de filtros utilizan operaciones que involucran retrasos de la forma $\nabla = 1 - B$ en donde B es está dado por $BX_t = X_{t-1}$.

El método en Guerrero (2008), se sustenta en el filtro de Whittaker (1923). Cabe notar que este último ha tenido extensiones como las elaboradas por Knorr (1984) y Nocon y Scott (2012). Con los parámetros de orden de diferenciación d = 2 y la matriz de pesos idénticos en las observaciones, W = I, el método de Whittaker se utilizó por Hodrick y Prescott (1997) para estimar tendencias y ciclos económicos y se le conoce en el ámbito de la econometría como filtro de Hodrick y Prescott. En él se reduce gradualmente el componente aleatorio, induciendo a una suavidad, y, a través de este se estiman valores suavizados que representan mejor a los valores verdaderos no observables. Se considera además, por medio de un parámetro de

suavizamiento, λ , simultáneamente tanto la bondad de ajuste como la suavidad. Es importante mencionar que en general cuando el analista que realiza estimaciones de manera automática, es decir utilizando herramientas implementadas en los softwares estadísticos, no puede decidir qué valor otorgarle al parámetro λ, por tanto ignora la suavidad alcanzada y no tiene elementos válidos desde el punto de vista estadístico para hacer comparativos.

El filtro es relativamente sencillo de aplicar para cualquier serie de datos y, como lo menciona y demuestra Guerrero (2008), produce resultados idénticos a otros métodos de suavizamiento. En Kaiser y Maravall (2001) se proporciona una explicación más detallada de la teoría matemática detrás del filtro. La estructura del filtro Hodrick y Prescott proviene de la siguiente expresión,

$$M(\lambda) = \sum_{t=1}^{N} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^{N} (\nabla^2 \tau_t)^2 \tag{3.2}$$

$$\min_{\tau} M(\lambda) = \sum_{t=1}^{N} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^{N} [(\tau_t - \tau_{t-1}) - (\tau_{t-1} - \tau_{t-2})]^2$$

donde λ es el parámetro que penaliza la ausencia de suavidad, en el primer término se aboca a el ajuste de la tendencia con los datos observados, en tanto que el segundo a la inducción de la suavidad. Puede apreciarse que cuando $\lambda \to 0$ la tendencia estimada $\{\hat{\tau}_t\}$ tiende a ser igual a los valores observados, debido a que el segundo parámetro se vuelve cero y el valor $\{\hat{\tau}_t\}$ de la serie que minimiza es el mismo $\{y_t\}$. Por el contrario, cuando $\lambda \to \infty$ el valor que minimiza la serie sería el modelo lineal $\nabla^2 \tau_t = 0$, conocido como la recta de regresión. La expresión anterior, escrita en forma matricial está dada por

$$\min_{\tau} M(\lambda) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\tau})' (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\tau}) + \lambda (K_2 \boldsymbol{\tau})' (K_2 \boldsymbol{\tau})$$

donde $\boldsymbol{y} = (y_{\boldsymbol{1}}, \dots, y_{\boldsymbol{N}})'$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{\boldsymbol{1}}, \dots, \tau_{\boldsymbol{N}})'$ y K_2 es la matriz de $(N+2) \times N$ de segundas diferencias. Es decir, viene dada por la matriz tridiagonal

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & . & . & . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución al problema que se propone es alcanzable tras aplicar mínimos cuadrados generalizados, con lo que se obtiene el resultado

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = (I_N + \lambda K_2' K_2)^{-1} \boldsymbol{y} \tag{3.3}$$

La serie $\{\hat{\tau}_t\}$ representa la tendencia estimada, o curva de mortalidad, dado un valor de λ. Nótese que el valor de λ se establecerá, bajo este enfoque, con base en la necesidad del análisis que se requiera y en general de la naturaleza de los datos. También como fue mencionado anteriormente, la varianza de $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, en términos de error cuadrático medio, está dada por $Var(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = (I_N + \lambda K_2' K_2)^{-1} \sigma_{\eta}^{-2}$ (para detalles, véase Guerrero, 2008). Debe tenerse presente que por medio de $Var(\hat{\boldsymbol{\tau}})$ se obtienen los intervalos de las respectivas estimaciones. Así pues, la suavidad se mide por la siguiente expresión, que es un índice,

$$S(\lambda; N) = 1 - \mathrm{tr}[(I_N + \lambda K_2' K_2)^{-1}]/N \tag{3.4}$$

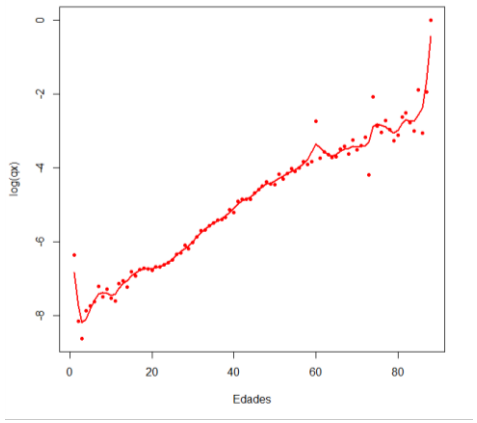
en donde tr(.) representa la traza de la matriz. Puede notarse que la suavidad no depende de los datos, sino solo del valor del parámetro λ y del número total de datos N. Es claro que cuando $\lambda \to 0$ la suavidad $S(\lambda; N) \to 0$ en tanto que cuando $\lambda \to \infty$ la suavidad $S(\lambda; N) \to 1$, este índice se representa en términos porcentuales $S(\lambda; N)\%$. Se puede demostrar que el máximo del índice de suavidad alcanzable para un conjunto de N datos, está dado por $1 - 2/N$. Con ello, por ejemplo con 100 datos la máxima suavidad a la que se puede aspirar es de $S = 98\%$. Sin embargo este orden de índice de suavidad es demasiado alto y lo que genera carece de sentido actuarial. Asimismo el índice cuenta con algunas propiedades deseables como lo son linealidad, adherencia a la unidad y no alteración ante transformaciones lineales de los datos. En el contexto estadístico, se deduce que el índice es una reparametrización de lo que se conoce en el marco del suavizamiento o graduación como grados de libertad (df, degree of freedom).

Una crítica que existe a esta propuesta de índice radica en cómo justificar la imposición de determinado grado de suavidad, aun cuando se argumenta que es relevante para hacer comparativos. Por ejemplo, en Alba y Gómez (2012) se abona al respecto desde la perspectiva bayesiana y se propone un método para tal fin. En este trabajo justamente, la propuesta para imponer la suavidad pertinente se resume en realizar mediciones de suavidades inducidas en aplicaciones previamente construidas. Otras opciones podrían ser ejercicios de simulación o a través de indicadores de cobertura, es decir con una determinada suavidad impuesta, cuántas observaciones están contenidas dentro del intervalo de estimación e imponer aquella en la que se tengan coberturas de órdenes específicos.

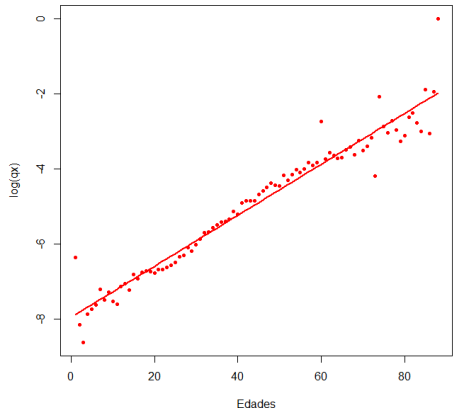
Desde la perspectiva usual, para suavizar datos, se podría obtener un valor del parámetro de suavizamiento λ óptimo, mediante de criterios automáticos como el Akaike, Schwarz, Validación cruzada generalizado (VCG) o el de Validación cruzada ordinario (VCO). En Cortés-Toto et al (en prensa), se mide la suavidad alcanzada cuando el parámetro de suavizamiento λ, es elegido a través de esta clase de criterios. En tal trabajo, se concluye que en principio el analista depende de la cantidad de datos, del tipo de tendencia subyacente a los mismos y que es menos relevante la eventual presencia de estacionalidad y la varianza existente. Además, se dimensiona la suavidad inducida con dichos criterios y se evidencia que escapan a la decisión del analista. A continuación se presentarán algunos ejemplos y comparativos que ponen de manifiesto la necesidad y la ventaja de imponer suavidades como es factible con el uso de la propuesta aquí expuesta.

En el software estadístico R, con la librería *pspline*, los criterios VCG y VCO están disponibles (véase en el Anexo, el código genérico). Al emplearlo con datos de Mendoza et al (2000), con el criterio VCG se obtiene de manera automática λ = 0.99, lo cual implica un índice de suavidad de aproximadamente el $S = 60.13\%$ y grados de libertad de 35.09. Se observa cómo la tendencia se dispone próxima a los datos. Con el criterio VCG, se obtiene λ = 12,805,701, un índice de suavidad de $S = 97.71\%$ y grados de libertad de 2.01, lo cual hace que la tendencia sea prácticamente una recta. En ambos casos, queda sin sentido actuarial la estimación de la curva de mortalidad. Por un lado es demasiada rugosa la estimación y por el otro en principio la curvatura de la mortalidad en edades jóvenes es ignorada y se evoca a la añeja propuesta de Moivre. Ante esta situación queda claro que para un mismo conjunto de datos, dos criterios automáticos estadísticos *ad hoc*, generan estimaciones totalmente distintas. Si se impone un índice de suavidad, por ejemplo del $S = 85\%$ como el sugerido en Ovin y Silva (2016a y 2016b), con λ = 45.5 y grados de libertad de 13.18, se obtienen resultados con más sentido actuarial. Debe saberse en términos operativos que para obtener determinado índice de suavidad, en la ecuación (3.4), se calibra dando distintos valores de λ, hasta que de manera heurística se obtiene la suavidad deseada.

(a)



(b)



(c)

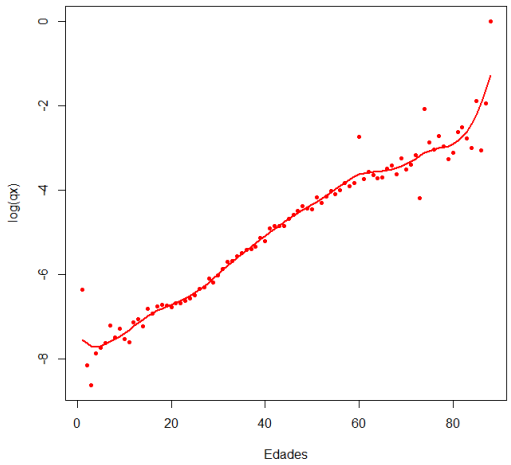


Figura 4.1. Estimaciones de tendencias con criterios automáticos e impuesto: (a) $\lambda = 0.99, S = 60.13\%$; (b) $\lambda = 12{,}805{,}701, S = 97.71\%$; (c) $\lambda = 45.5, S = 85\%$.

Con la finalidad de sensibilizar al usuario de la presente propuesta, en la Figura siguiente se muestra un ejemplo con diferentes valores de λ, con datos simulados. Se puede observar cómo con valores pequeños de λ, como en la Figura 4.2 (a) la tendencia estimada se aproxima bastante a los valores observados, mientras que cuando λ crece la suavidad se vuelve más evidente los datos quedan alrededor de la curva suavizada y para λ mayores a 1000 la tendencia comienza a parecerse a una recta, como en la Figura 4.2 (d).

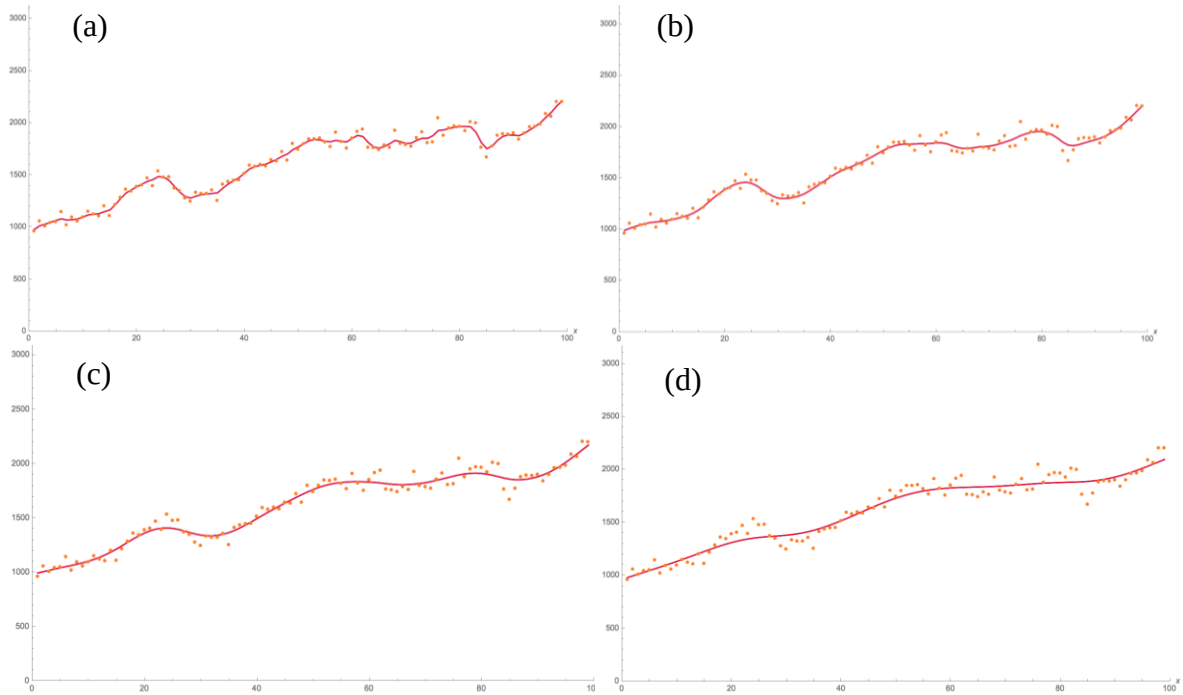


Figura 4.2. Tendencias estimadas con diferentes valores de λ: (a) $\lambda = 1, S = 60.32\%$; (b) $\lambda = 10, S = 78.41\%$; (c) $\lambda = 100, S = 87.68\%$ y (d) $\lambda = 1000, S = 92.68\%$.

4. Comparativo con otras curvas de mortalidad y funciones de pérdida

En esta sección se contrastan resultados desde la perspectiva aquí propuesta con algunas curvas de mortalidad obtenidas en Vargas (2014) y comparables con aquellos estimados por medio de índices de suavidades impuestas del $S = 85\%$ y $S = 90\%$ respectivamente. En todos los casos se utiliza el logaritmo natural de las q_x. Se seleccionaron a los que ahí se refieren como Tablas de mortalidad mexicana ajustada mediante el modelo de: (a) CNSF; (b) Makeham; (c) Extrapolación polinomial y (d) Gompertz. En particular el modelo HP empleado, no resultó ser comparable pues en casi todas las edades se tiene una estimación constante hasta casi los 75 años (véase, Vargas, 2014, pág. 88). En general, se aprecia cómo las estimaciones seleccionadas y realizadas por la autora, están comprendidas dentro del intervalo de estimación de la tendencia o en algunos casos cercanos a alguna de las fronteras del mismo. También, con la escala logarítmica, parece mostrarse un mejor patrón en la estimación de la tendencia o curva de mortalidad, con la propuesta no paramétrica sobre todas las propuestas paramétricas expuestas por la autora. Es probable que en términos numéricos la diferencia parezca insignificante, pero si se consideran factores multiplicativos como lo son las sumas aseguradas esto toma una relevancia significativa desde la perspectiva actuarial.

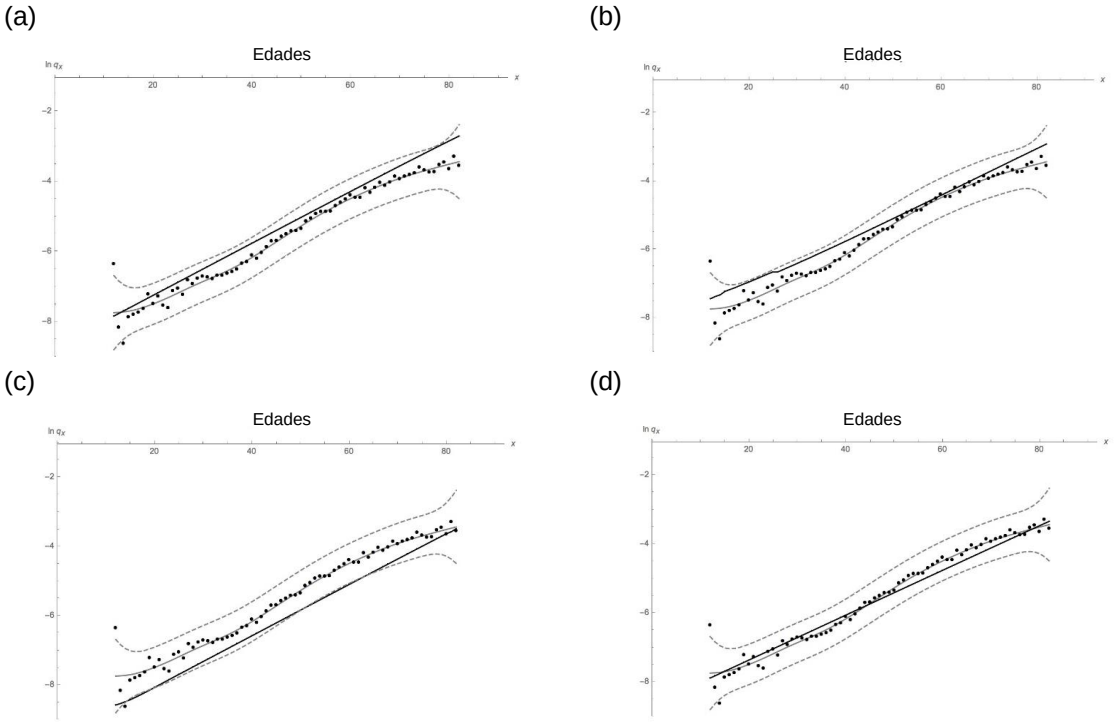


Figura 4.3. Comparativos de estimaciones de curvas de mortalidad con intervalos de estimación de 2 desviaciones estándar (líneas sólidas tenues), con $\lambda = 293.7$ y $S = 90\%$ (líneas sólidas): (a) CNSF; (b) Makeham; (c) Extrapolación polinomial; (d) Gompertz.

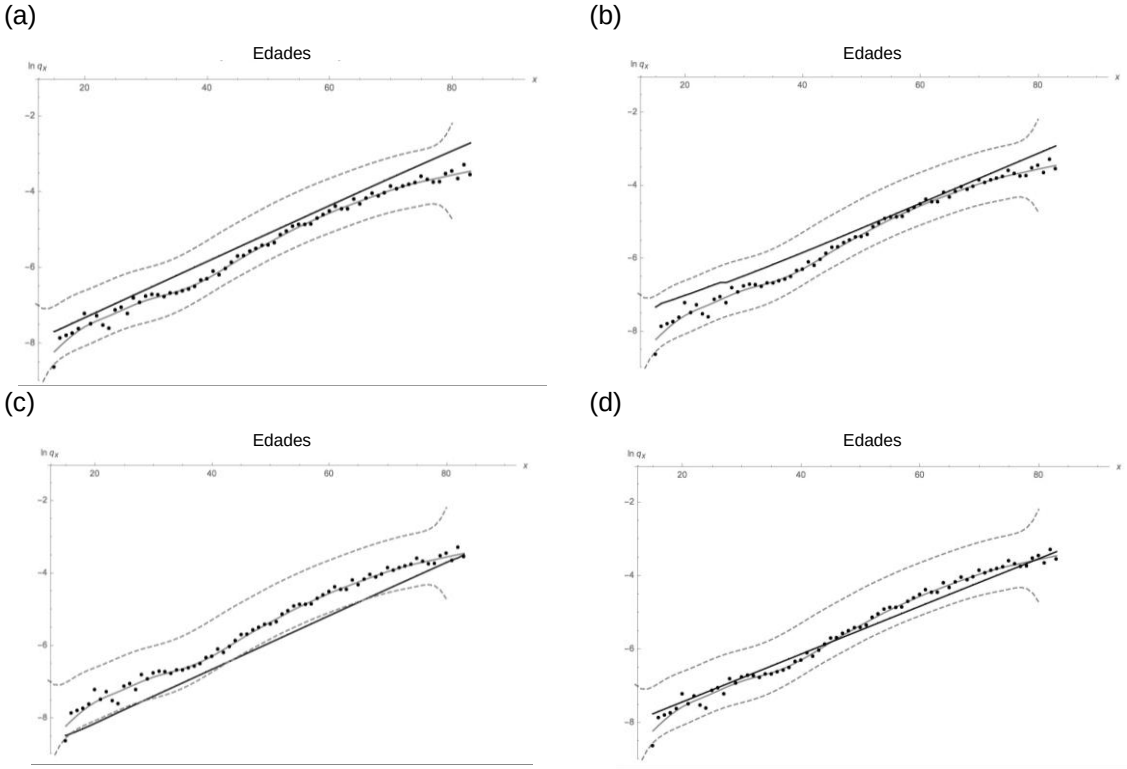


Figura 4.4. Comparativos de estimaciones de curvas de mortalidad con intervalos de estimación de 2 desviaciones estándar (líneas sólidas tenues), con $\lambda = 49.25$ y $S = 85\%$ contra (líneas sólidas): (a) CNSF; (b) Makeham; (c) Extrapolación polinomial; (d) Gompertz.

Dado que uno de los propósitos del trabajo es estimar la suavidad necesaria para aproximar lo mejor posible el modelo de HP, y así tener un parámetro de referencia en cuanto a la suavidad necesaria para estimar una curva de mortalidad con esta perspectiva, se propone conseguirlo a través de medir la diferencia *punto a punto* que hay entre la tendencia estimada y los valores de la mortalidad estimados por el modelo HP, mediante dos de las funciones de pérdida propuestas en Carriere (1992). Sin pérdida de generalidad sean $\{q_x\}$ los valores observados, y, $\{\hat{q}_x\}$ los valores estimados mediante HP. Sean $\{\hat{\tau}_t\}$ los valores suavizados con el logaritmo aplicado dado un valor de λ. Al compararlos con los valores estimados mediante HP $\{\hat{q}_x\}$ se necesita aplicar el inverso de logaritmo para manejarlos en la misma escala (como probabilidades), a esta serie se le llamará $\{\hat{t}_x\}$. Las funciones de pérdida elegidas dependen exclusivamente del valor de λ, y son

$$P_1(\lambda) = \sum_{x=0}^{n} \left(1 - \frac{\hat{t}_x}{\hat{q}_x}\right)^2 \tag{4.1}$$

$$P_2(\lambda) = \sum_{x=0}^{n} (\log\,[\log(1 - \hat{t}_x)/\log(1 - \hat{q}_x)])^2 \tag{4.2}$$

Con esto se procede a realizar las siguientes tareas. La primera, encontrar el valor de λ que minimiza las expresiones (4.1) y (4.2). Después, encontrar el porcentaje de suavidad logrado para cada uno de los dos valores de λ obtenidos anteriormente mediante la expresión (3.3). Por último se analiza el valor mínimo obtenido por las funciones de pérdida (4.1) y (4.2) para poder comparar las distintas series de datos entre si. Este valor representará la distancia total que existe entre la serie suavizada $\{\hat{t}_x\}$ y la serie estimada por HP $\{\hat{q}_x\}$.

5. Resultados con el modelo de Heligman y Pollard (HP)

Se utilizan estimaciones realizadas en los trabajos de HP (1980), Kostaki (1991), Felipe et al (2002) y Jos (2012), en donde se encuentran el valor de los respectivos parámetros para el modelo de HP. Los valores observados de HP y Kostaki se encuentran en los anexos correspondientes, los de Jos (2012) en "*Asian Mortality Table*" que se encuentra en la página web de la sociedad actuarial de Hong Kong. Los datos observados de Felipe et al (2002) fueron obtenidos de la página *HumanMortality.com*. El número total de series, es decir Tablas de mortalidad, utilizadas es de 42. Los cálculos de este apartado se elaboraron con el software de Mathematica de Wolfram versión 10 (véase código genérico en la sección de Anexos).

Cuando se busca la minimización de las funciones de pérdida, dadas por las expresiones (4.1) y (4.2), se obtienen valores pequeños de λ que están entre 0.07 y 0.08 en los dos casos, siendo prácticamente el mismo resultado para todas las series analizadas. Usando este valor de λ la suavidad alcanzada está en el rango de $S = 23\%$ a $S = 25\%$, con lo cual se tienen estimaciones demasiado rugosas. Los patrones de comportamiento de las funciones de pérdida se muestran a continuación y fueron sistemáticos en todos y cada uno de las series consideradas. Nótese que en todas las series el mínimo se localiza relativamente pronto y luego los patrones de las funciones crecen de manera aparentemente cuadrática. El mecanismo utilizado para construir las gráficas de las funciones de pérdida fue a través de asignar paulatinamente distintos valores crecientes del parámetro de suavizamiento λ.

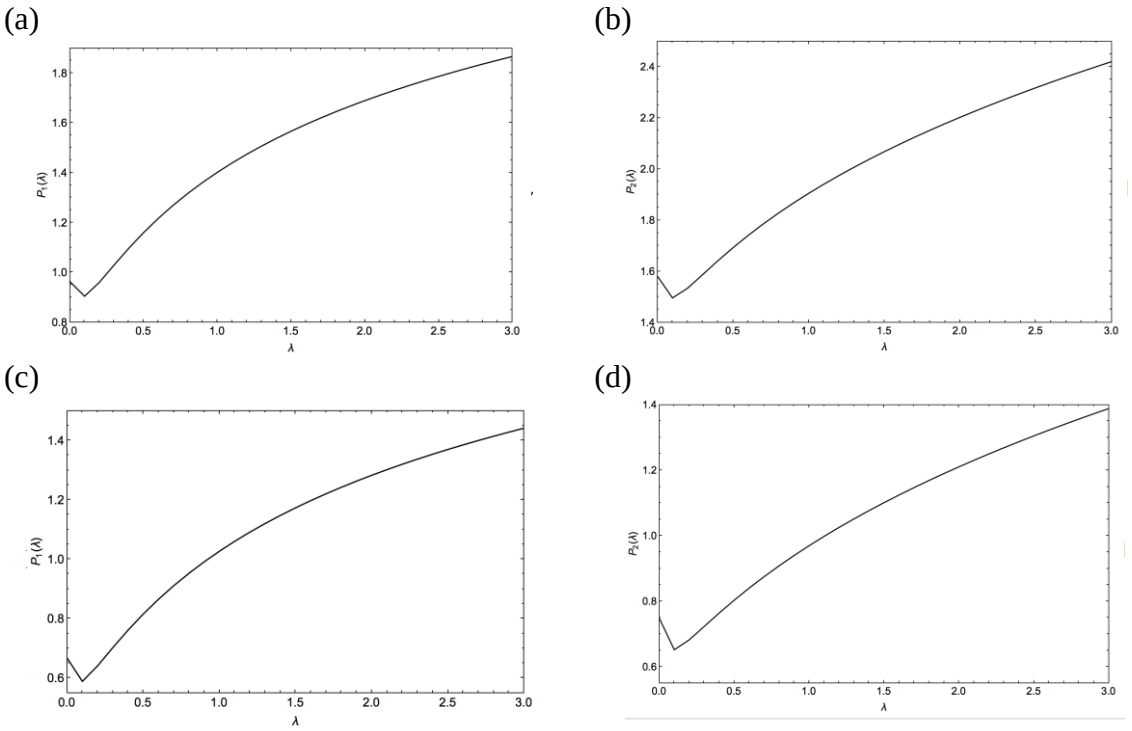


Figura 5.1. Comportamiento de funciones de pérdida: P_1 y P_2 : (a) y (b) Australia hombres 1970-1972; (c) y (d) España hombres 1990

Al realizar este procedimiento de análisis para todas las series mencionadas, se tienen los siguientes resultados mostrados en los histogramas de la Figura 5.2. La descriptiva de los mismos, así como demás hallazgos aparecen más adelante en la Tabla 5.2. En ambos casos se aprecia una asimetría a la derecha, con una cola pesada.

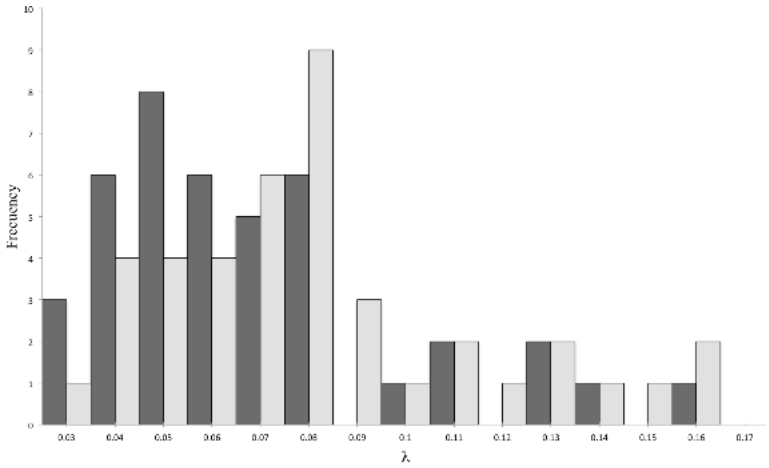
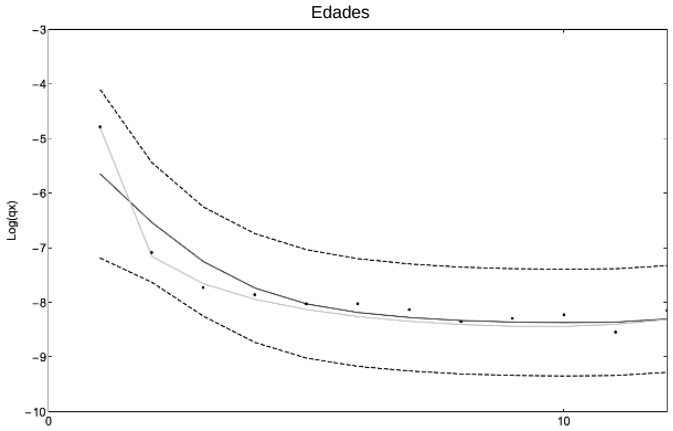


Figura 5.2. Distribución de los valores de λ que minimizan P_1 vs P_2 , obscuro y claro respectivamente.

Para P_1 los valores más frecuentes, o sea la moda, se ubica entre 0.04 y 0.08, para P_2 los valores más comunes estuvieron alrededor de 0.08. En la Figura 5.3, se tienen dos segmentos de la serie suavizada de España 1990 con un parámetro de suavizamiento de λ = 0.07 obtenido

por medio de la expresión (4.1). Así, el índice de suavidad en este caso es de S =23.47%. Se observa claramente cómo la tendencia estimada se aproxima a casi todos los valores observados de la serie, esto debido al valor pequeño del parámetro λ. Esto pasa prácticamente con la totalidad de las series utilizadas. El problema no es tan evidente, pues el desbalance (o desajuste) generado en las colas de los datos hace que el valor de la función de pérdida crezca con gran rapidez conforme el valor de λ crece por apenas valores mayores a 0.1, lo cual ocurre para los primeros valores observados y para los últimos. La falta de precisión en los primeros datos hace que las funciones de pérdida crezcan rápidamente, haciendo que el valor de λ que minimiza dichas funciones sean valores muy pequeños. El problema se presenta en menor escala en los valores finales de la serie (entre 90 y 99 de los valores observados) y sólo en algunos casos de las 42 series.

(a)



(b)

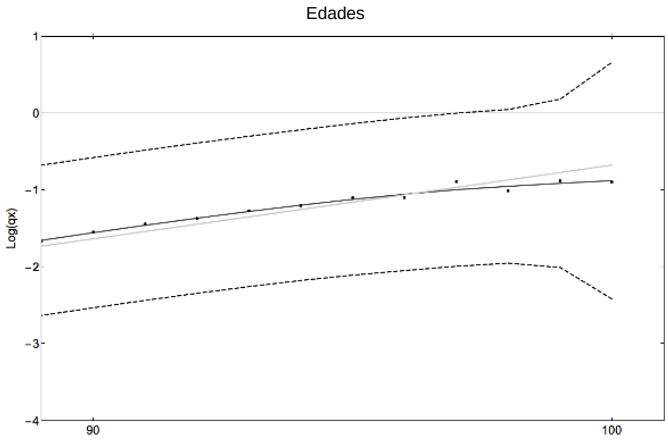


Figura 5.3. España hombres 1990 con $\lambda = 0.07$. (a) mortalidad infantil; (b) mortalidad senil. Datos observados: puntos; curva estimada (tendencia) con el modelo HP: línea gris; tendencia estimada: línea negra.

En la Tabla 5.1 se presenta la evolución del comportamiento de las funciones de pérdida, ante distintos valores del parámetro de suavizamiento λ, pero con la salvedad de que tales se han separado en dos diferentes componentes. Así las expresiones (4.1) y (4.2) pueden ser reescritas como sigue

$$P_1(\lambda) = \sum_{x=0}^{11}\left(1 - \frac{\hat{t}_x}{\log(\hat{q}_x)}\right)^2 + \sum_{x=12}^{99}\left(1 - \frac{\hat{t}_x}{\log(\hat{q}_x)}\right)^2$$

$$P_1(\lambda) = P_{1(0,11)}(\lambda) + P_{1(12,99)}(\lambda)$$

y con un razonamiento similar se tiene

$$P_2(\lambda) = P_{1(0,11)}(\lambda) + P_{2(12,99)}(\lambda)$$

λ	S%	$P_{1(0,11)}$	$P_{1(12,99)}$	P_1	$P_{2(0,11)}$	$P_{2(12,99)}$	P_2
0	0.00	0.27	0.39	0.67	0.23	0.51	0.75
0.01	5.27	0.26	0.38	0.63	0.22	0.49	0.71
0.02	9.59	0.25	0.37	0.61	0.21	0.48	0.69
0.03	13.21	0.24	0.36	0.60	0.21	0.47	0.68
0.04	16.30	0.24	0.35	0.59	0.20	0.46	0.67
0.05	19.00	0.24	0.35	0.59	0.20	0.45	0.66
0.06	21.37	0.24	0.34	0.58	0.21	0.45	0.65
0.07	23.47	0.24	0.34	0.58	0.21	0.44	0.65
0.08	25.36	0.25	0.34	0.58	0.21	0.44	0.65
0.09	27.06	0.25	0.33	0.59	0.21	0.44	0.65
0.1	28.62	0.26	0.33	0.59	0.22	0.43	0.65
0.2	39.11	0.33	0.31	0.64	0.27	0.42	0.68
0.3	45.08	0.40	0.31	0.70	0.32	0.41	0.72
0.4	49.11	0.46	0.30	0.76	0.36	0.40	0.76
0.5	52.08	0.52	0.30	0.82	0.41	0.39	0.80
0.6	54.40	0.57	0.29	0.87	0.45	0.39	0.84
0.7	56.27	0.62	0.29	0.91	0.49	0.39	0.88
0.8	57.83	0.67	0.29	0.95	0.52	0.38	0.91
0.9	59.18	0.71	0.28	0.99	0.56	0.38	0.94
1	60.33	0.75	0.28	1.03	0.59	0.38	0.97
2	67.14	1.02	0.26	1.28	0.86	0.36	1.21
3	70.51	1.19	0.25	1.44	1.05	0.34	1.39
4	72.66	1.32	0.24	1.55	1.20	0.33	1.53
5	74.22	1.41	0.23	1.64	1.33	0.32	1.65
6	75.40	1.49	0.23	1.71	1.45	0.31	1.76
7	76.36	1.55	0.22	1.77	1.55	0.31	1.85
8	77.16	1.60	0.22	1.82	1.64	0.30	1.94
9	77.84	1.65	0.21	1.86	1.72	0.30	2.01
10	78.42	1.69	0.21	1.90	1.79	0.29	2.08
20	81.86	1.91	0.20	2.11	2.31	0.27	2.58
30	83.58	2.01	0.20	2.21	2.64	0.27	2.91
40	84.69	2.06	0.21	2.27	2.89	0.27	3.17
50	85.49	2.10	0.22	2.32	3.11	0.28	3.39
60	86.11	2.14	0.23	2.36	3.30	0.29	3.60
70	86.61	2.17	0.24	2.41	3.48	0.31	3.79
80	87.03	2.21	0.25	2.46	3.64	0.32	3.96
90	87.38	2.24	0.27	2.51	3.80	0.34	4.14
100	87.69	2.28	0.29	2.57	3.94	0.36	4.30
200	89.53	2.77	0.46	3.23	5.15	0.56	5.71
300	90.45	3.31	0.64	3.95	6.07	0.77	6.84
400	91.05	3.83	0.81	4.64	6.81	0.97	7.77

Tabla 5.1 España hombres, 1990

Se puede observar cómo para valores pequeños del parámetro de suavizamiento λ, entre 0.03 y 0.5, $P_{1(0,11)}$ alcanza su mínimo y se incrementa rápidamente cuando λ crece, mientras $P_{1(12,99)}$ alcanza su mínimo para valores entre 4 y 20, pero el total de P_1 es fuertemente influenciado por el rápido crecimiento de $P_{1(0,11)}$. Un escenario similar ocurre en la función de pérdida P_2. De hecho, también se aprecia cómo el valor $P_{2(0,11)}$ para valores entre 8 y 20 es considerablemente mayor que $P_{2(12,99)}$ donde su mínimo se encuentra de modo aproximado. Se debe recalcar que $P_{2,(0,11)}$ contiene solamente 12 de los 100 datos, mientras $P_{2(12,99)}$ el resto en el sentido de que el índice de suavidad depende de la cantidad de datos. La presente situación se manifiesta análogamente en las demás series analizadas en el documento.

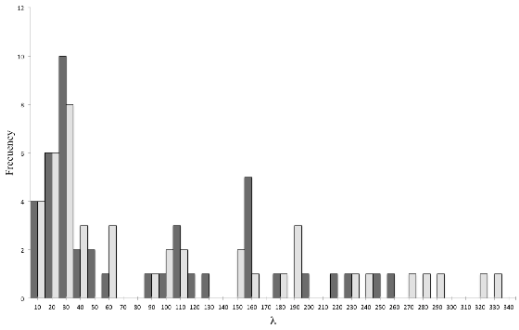
Dado que el desajuste empieza a crecer más significantemente en la parte de la mortalidad infantil, se decide omitirles y así la propuesta, en relación a la curva de la mortalidad del modelo HP, como se notará más adelante, crea un ajuste casi perfecto en el resto de los datos. Con esta restricción del número de datos a emplear, la máxima suavidad a la que se puede aspirar es de $S = 97.7\%$. De tal modo que las funciones de pérdida quedan como sigue

$$P_{1(12,99)}(\lambda) = \sum_{x=12}^{99} \left(1 - \frac{\hat{t}_x}{\log(\hat{q}_x)}\right)^2 \tag{11}$$

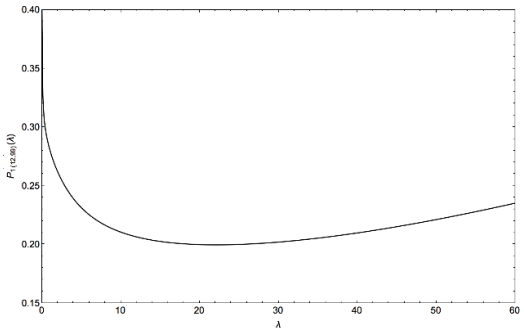
$$P_{2(12,99)}(\lambda) = \sum_{x=12}^{99} (\log\,[\log(1-\hat{t}_x)/\log(1-\hat{q}_x)])^2 \tag{12}$$

En la Figura 5.4 se presentan los comportamientos de las funciones $P_{1(12,99)}$ y $P_{2(12,99)}$. Cabe notar que el patrón a continuación expuesto es similar en el resto de las series elegidas, y, una vez localizado el mínimo el patrón de las funciones de pérdida, a diferencia de los anteriores, crecen de manera menos acelerada. Al igual que con las otras funciones de pérdida, se tiene una distribución asimétrica a la derecha.

(a)



(b)



(c)

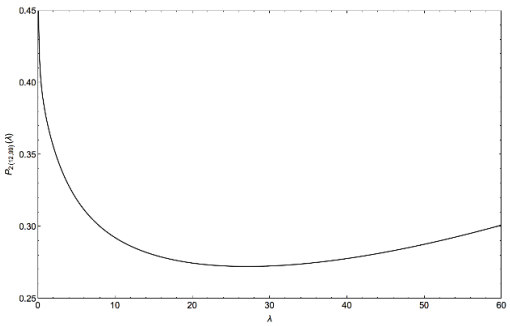
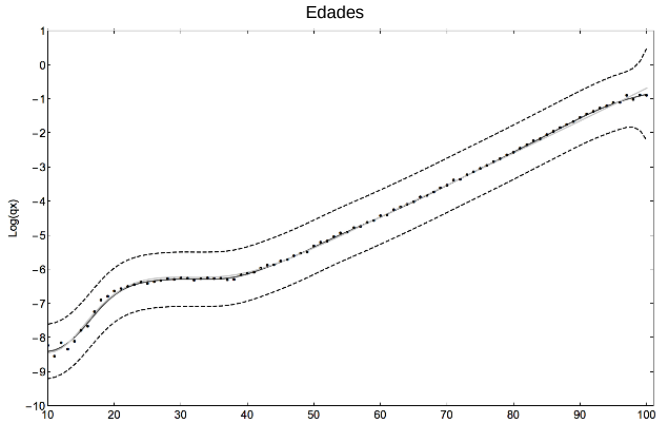


Figura 5.4. (a) Distribución de los valores de λ que minimizan $P_{1(12,99)}$ vs $P_{2(12,99)}$, obscuro y claro respectivamente. Comportamiento funciones de pérdida: (b) $P_{1(12,99)}$; (c) $P_{2(12,99)}$ ambas para España Hombres, 1990

Ahora el valor que minimiza la función $P_{1(12,99)}$ es λ = 23.12 que implica una suavidad de $S =$ 82.5%, y para $P_{2(12,99)}$ el valor obtenido es λ =28.36 con una suavidad alcanzada de $S = 83.25\%$. En otras palabras, los dos valores de λ fueron muy similares para las dos funciones de pérdida. La mayor discrepancia fue encontrada en la última parte de las series.

(a)



(b)

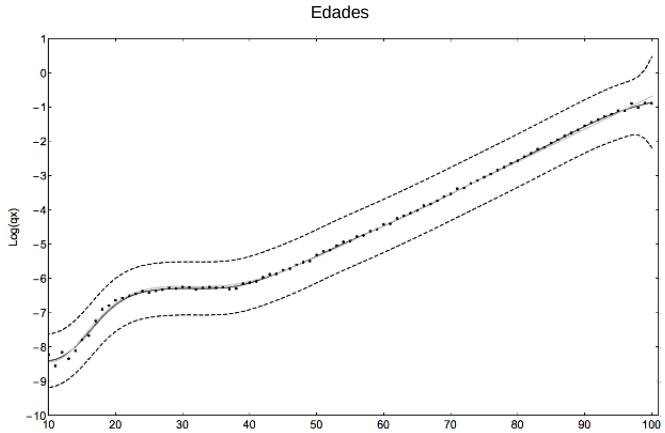


Figura 5.5. España hombres 1990 con: (a) $\lambda = 23.12$ y $S = 82.5\%$; (b) $\lambda = 28.36$ an $S = 83.25\%$. Datos observados: puntos; curva estimada (tendencia) con el modelo HP: línea gris; tendencia estimada: línea negra.

Se aprecia que existe una mejora sustantiva en el ajuste para casi todos los valores. De hecho, eliminando los primeros valores de la serie de las funciones de pérdida se logra que el método proporcione resultados más consistentes e interpretables en función de los valores de λ y de la suavidad S. El resumen de todos los valores de λ obtenidos para las 42 series se presenta en la Tabla 5.2, en ella se realiza una comparativa de las funciones P_1, P_2, $P_{1(12,99)}$ y $P_{2(12,99)}$, así como su media y desviación estandar. La información está organizada tanto por décadas como por sexo.

Autor (año)	serie (año)	λ	S%	P_1	λ	S%	P_2	λ	S%	$P_{1(12,99)}$	λ	S%	$P_{2(12,99)}$
								1970-1980					
HP (1980)	Australia mujeres, 1970-1972	0.08	25.35	0.77	0.09	27.06	0.82	5.69	75.06	0.50	6.56	75.96	0.53
Kostaki (1991)	Suecia mujeres, 1976-1980	0.11	29.87	0.56	0.14	33.50	0.52	16.79	80.73	0.17	13.92	79.82	0.16
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1976	0.05	18.99	1.97	0.06	21.36	1.86	93.22	87.49	1.50	80.77	87.06	1.43
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1977	0.08	25.35	1.67	0.08	25.35	1.60	143.65	88.69	1.08	136.86	88.56	1.10
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1978	0.06	21.36	1.53	0.08	25.35	1.54	105.40	87.84	1.05	91.75	87.44	1.07
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1979	0.05	18.99	2.35	0.07	23.47	2.18	215.50	89.70	1.50	211.10	89.65	1.44
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1980	0.05	18.99	1.67	0.07	23.47	1.79	96.35	87.58	1.18	94.77	87.53	1.29
HP (1980)	Australia hombres, 1970-1972	0.07	23.47	0.90	0.08	25.35	1.49	3.74	72.17	0.70	4.29	73.16	1.26
Kostaki (1991)	Suecia hombres, 1976-1980	0.05	18.88	0.41	0.04	16.20	0.40	16.26	80.58	0.07	16.44	80.64	0.07
Felipe et al (2002)	España hombres, 1976	0.05	18.99	0.73	0.07	23.47	0.83	23.77	82.62	0.37	27.57	83.24	0.41
Felipe et al (2002)	España hombres, 1977	0.04	16.30	0.71	0.05	18.99	0.77	14.63	80.39	0.47	14.44	80.33	0.52
Felipe et al (2002)	España hombres, 1978	0.04	16.30	0.85	0.04	16.30	0.93	22.39	82.36	0.47	22.16	82.31	0.52
Felipe et al (2002)	España hombres, 1979	0.06	21.36	0.88	0.08	25.35	1.40	26.48	83.07	0.54	37.42	84.44	0.97
Felipe et al (2002)	España hombres, 1980	0.08	25.35	0.48	0.10	28.62	0.61	12.26	79.50	0.16	13.78	80.10	0.25
	Media (total)	0.06	21.40	1.11	0.08	23.85	1.20	56.87	82.70	0.70	55.13	82.87	0.79
	Media (mujeres)	0.07	22.70	1.50	0.08	25.65	1.47	96.66	85.30	1.00	90.82	85.15	1.00
	Media (hombres)	0.06	20.09	0.71	0.07	22.04	0.92	17.08	80.10	0.40	19.44	80.60	0.57
	Desviación (total)	0.02	3.97	0.61	0.03	4.65	0.56	64.22	5.20	0.48	60.92	4.90	0.49
	Desviación (mujeres)	0.02	4.25	0.63	0.03	3.91	0.59	71.97	5.37	0.50	70.38	5.15	0.48
	Desviación (hombres)	0.02	3.47	0.19	0.02	4.89	0.40	7.84	3.74	0.22	10.74	3.66	0.41
Autor (año)	serie (año)	λ	S%	P_1	λ	S%	P_2	λ	S%	$P_{1(12,99)}$	λ	S%	$P_{2(12,99)}$
								1981-1990					
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1981	0.06	21.36	2.02	0.07	23.47	1.93	170.64	89.13	1.26	186.83	89.36	1.23
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1982	0.08	25.35	1.86	0.08	25.35	2.41	129.96	88.42	1.36	161.71	89.00	1.81
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1983	0.08	25.35	1.62	0.09	27.06	1.58	96.78	87.60	1.13	97.21	87.61	1.12
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1984	0.16	35.73	1.93	0.16	35.73	2.47	110.31	87.97	1.34	151.42	88.83	1.84
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1985	0.11	30.04	2.06	0.13	32.57	2.80	143.93	88.69	1.67	217.50	89.72	2.25
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1986	0.07	23.47	1.86	0.08	25.35	2.73	150.84	88.82	1.42	296.20	90.42	2.17
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1987	0.14	33.69	2.04	0.16	35.73	2.67	234.30	89.98	1.29	283.50	90.32	1.77
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1988	0.08	25.35	1.82	0.12	31.35	2.81	182.30	89.29	1.38	246.30	90.01	2.16
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1989	0.07	23.47	1.71	0.08	25.35	2.30	219.60	89.74	1.24	261.60	90.14	1.69
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1990	0.04	16.30	1.49	0.06	21.36	1.74	42.83	84.94	1.11	55.47	85.85	1.36
Felipe et al (2002)	España hombres, 1981	0.05	18.99	0.97	0.08	25.35	1.05	30.45	83.64	0.58	36.42	84.34	0.62
Felipe et al (2002)	España hombres, 1982	0.04	16.30	0.46	0.05	18.99	0.63	11.44	79.14	0.23	12.62	79.65	0.34
Felipe et al (2002)	España hombres, 1983	0.04	16.30	0.51	0.04	16.30	0.76	5.00	74.21	0.31	9.85	78.34	0.55
Felipe et al (2002)	España hombres, 1984	0.04	16.30	0.60	0.05	18.99	0.91	21.54	82.19	0.31	24.58	82.76	0.54
Felipe et al (2002)	España hombres, 1985	0.03	13.21	0.61	0.03	13.21	1.02	2.58	69.30	0.47	3.16	70.91	0.89
Felipe et al (2002)	España hombres, 1986	0.03	13.21	0.71	0.05	18.99	0.78	10.82	78.85	0.41	10.85	78.86	0.47
Felipe et al (2002)	España hombres, 1987	0.10	28.62	0.61	0.11	30.04	0.71	24.13	82.68	0.24	26.41	83.06	0.29
Felipe et al (2002)	España hombres, 1988	0.05	18.99	0.77	0.06	21.36	1.06	22.93	82.46	0.44	27.71	83.26	0.63
Felipe et al (2002)	España hombres, 1989	0.13	32.57	0.67	0.13	32.57	0.79	26.71	83.11	0.29	29.05	83.45	0.39
Felipe et al (2002)	España hombres, 1990	0.07	23.47	0.58	0.08	25.35	0.65	22.12	82.31	0.20	27.05	83.16	0.27
	Media (total)	0.07	22.90	1.25	0.09	25.22	1.59	82.96	84.12	0.83	108.27	84.95	1.12
	Media (mujeres)	0.09	26.01	1.84	0.10	28.33	2.34	148.15	88.46	1.32	195.77	89.13	1.74
	Media (hombres)	0.06	19.80	0.65	0.07	22.12	0.84	17.77	79.79	0.35	20.77	80.78	0.50
	Desviación (total)	0.04	6.78	0.63	0.04	6.35	0.84	77.98	5.57	0.52	105.61	5.21	0.71
	Desviación (mujeres)	0.04	5.77	0.19	0.04	5.13	0.45	57.46	1.44	0.16	80.10	1.43	0.40
	Desviación (hombres)	0.03	6.49	0.14	0.03	6.11	0.16	9.56	4.67	0.12	10.76	4.07	0.19
Autor (año)	serie (año)	λ	S%	P_1	λ	S%	P_2	λ	S%	$P_{1(12,99)}$	λ	S%	$P_{2(12,99)}$
								1991-2000					
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1991	0.06	21.36	1.42	0.07	23.47	1.52	135.09	88.53	1.06	140.62	88.63	1.14
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1992	0.13	32.57	1.90	0.15	34.74	2.80	86.43	87.26	1.40	120.23	88.21	2.25
Felipe et al (2002)	España mujeres, 1993	0.07	23.47	2.38	0.11	30.04	7.41	51.69	85.60	1.86	159.44	88.96	6.71
Jos (2012)	Tailandia mujeres,1997	0.56	53.52	0.74	0.56	53.52	1.22	22.53	82.38	0.72	28.37	83.35	1.20
Felipe et al (2002)	España hombres, 1991	0.06	21.36	0.64	0.07	23.47	0.62	43.83	85.02	0.21	45.72	85.17	0.23
Felipe et al (2002)	España hombres, 1992	0.05	18.99	0.66	0.06	21.36	0.72	60.96	86.17	0.25	63.43	86.29	0.27
Felipe et al (2002)	España hombres, 1992	0.06	21.36	0.79	0.09	27.06	1.00	86.07	87.25	0.22	99.03	87.66	0.40
Jos (2012)	Tailandia hombres, 1997	4.20	73.00	1.06	3.94	72.54	1.89	22.90	82.45	1.02	24.50	82.73	1.84
	Media (total)	0.65	33.20	1.20	0.63	35.78	2.15	63.69	85.58	0.84	85.17	86.38	1.76
	Media (mujeres)	1.09	33.68	0.79	1.04	36.11	1.06	53.44	85.22	0.43	58.17	85.46	0.69
	Media (hombres)	0.21	32.73	1.61	0.22	35.44	3.24	73.94	85.94	1.26	112.17	87.29	2.83
	Desviación (total)	1.45	19.69	0.65	1.35	18.08	2.24	37.83	2.24	0.61	52.03	2.41	2.13
	Desviación (mujeres)	2.07	26.24	0.19	1.93	24.40	0.58	26.75	2.06	0.40	31.55	2.09	0.77
	Desviación (hombres)	0.24	14.69	0.70	0.23	12.91	2.86	48.42	2.66	0.49	58.11	2.64	2.64

Tabla 5.2. Estimación de λ y S para cada una de las series considerando P_1, P_2, $P_{1(12,99)}$ y $P_{2(12,99)}$

En la Figura 5.6, se presentan ejemplos de los resultados obtenidos con sus respectivos valores de λ obtenidos. Aunque otra vez la falta de ajuste se da en los últimos valores, se observa en general un aumento en el ajuste por medio de la aplicación del método no paramétrico propuesto, además adicionalmente a las estimaciones puntuales, ahora se tienen intervalos de estimación de 2 desviaciones estándar. Así pues, una buena guía para el analista es seleccionar el valor de la media de valores de λ (o su equivalente medido en suavidad alcanzada) presentados en la tabla previa.

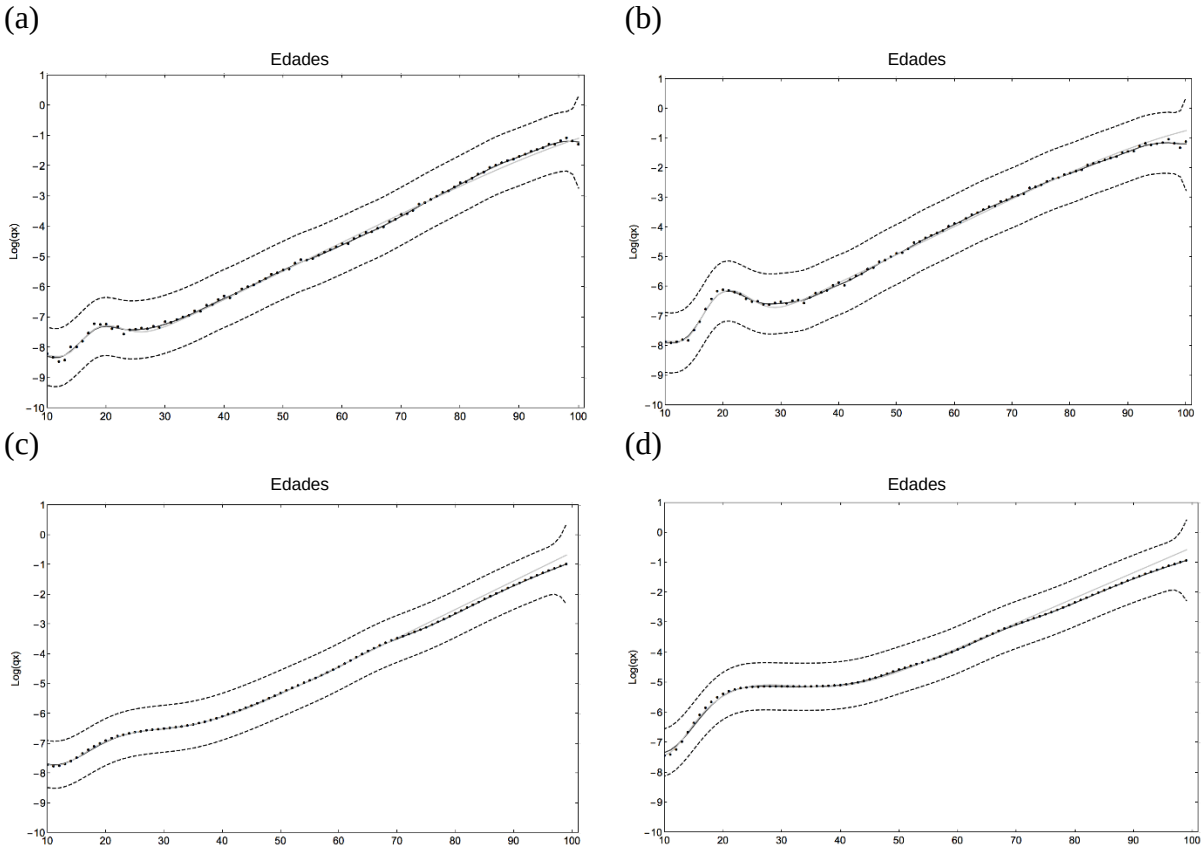


Figura 5.6. (a) Australia mujeres, 1970-1972, $\lambda = 5.69$, $S = 78.85\%$ y $P_{1(12,99)}$ = 0.4964; (b) Australia hombres, 1970-1972, $\lambda = 3.68$, $S = 75.068\%$ y $P_{1(12,99)}$ = 0.7048; (c) Tailandia mujeres, 1997, $\lambda = 25.37$, $S = 82.88\%$ y $P_{1(12,99)}$ = 0.7248; (d) Tailandia hombres, 1997, $\lambda = 25.44$, $S = 75.068\%$ y $P_{1(12,99)}$ = 1.0253. Datos observados: puntos; curva estimada (tendencia) con el modelo HP: línea gris; tendencia estimada: línea negra.

6. Conclusiones

Con base en los resultados comparativos con curvas de mortalidad previamente elaboradas, se tiene con la aplicación expuesta, una estimación altamente acertada en relación a las que se estimaron en Vargas (2014). Con el valor agregado de que el proceso para la generación de tales estimaciones son, desde el punto de vista de los autores, expeditas y satisfactorias para los rangos de edades establecidos. No se pretende desde luego generalizar este hallazgo y ni por supuesto desmerecer a todos los posibles modelos de mortalidad existentes en la literatura, pero sí dejar de manifiesto lo que al menos con los comparativos mostrados aquí se aprecia: se cuenta con una estimación apropiada.

Se encontró que el valor de la función de pérdida para las series de Felipe et al (2002) de hombres es bajo, comparado con el de las mujeres, esto se puede observar en la Tabla 5.1. Aunque se resolvió el problema del mal ajuste para los primeros datos de la serie, no podemos

observar un patrón de distribución que sigan los valores de λ. Es evidente que los resultados sugieren que el estudio de la suavidad alcanzada a través del modelo HP es perfectible para abarcar toda la experiencia de mortalidad. Una de las recomendaciones seria intentar suavizar por segmentos, siendo una posibilidad en tres, y resulta *ad hoc* la propuesta de Guerrero y Silva (2015), donde además se podría replicar el procedimiento aquí señalado para cada una de las tres etapas de la vida, a saber: mortalidad infantil, mortalidad en edades jóvenes-adultas y mortalidad senil.

Los resultados son más convincentes cuando se omite de las estimaciones la mortalidad infantil. Ahora se puede afirmar un rango adecuado de índices de suavidades para obtener curvas de mortalidad similares a aquellas obtenidas con la aplicación del modelo HP. En cada uno de los casos se encontró un valor de λ que aproxima lo suficientemente bien las estimaciones del modelo HP y además se proporciona un intervalo de confianza. Los porcentajes de suavidad dependen claramente de la cantidad de datos. Por ejemplo, para el rango de edades de 12-99 años ellos están entre $S = 85.26\%$ y $S = 89.29\%$, y, $S = 75\%$ y $S = 87.71\%$ para mujeres y hombres respectivamente. Es posible encontrar casos en los cuales los valores de las funciones de pérdida sean altos con respecto a lo que se espera, lo cual sugiere que no hay un valor de λ que aproxime lo suficiente a la tendencia estimada y a la curva de mortalidad objetivo.

Se detectó homogeneidad en los resultados si se agrupan las estimaciones por décadas, de hecho en muchos casos el índice de suavidad requiere ser más alto para el caso de mujeres que para hombres. Así pues se tienen dos conclusiones sustantivas: cuando solo se tiene una serie con tendencia lineal ascendente, es decir cuando se omite la mortalidad infantil, el índice de suavidad es alto, en tanto que cuando hay una tendencia no lineal en un segmento y otra tendencia lineal en el otro, es decir cuando se toman todas las edades, entonces el índice de suavidad es más bajo.

El enfoque no paramétrico se puede utilizar a cualesquiera otros modelos de mortalidad, siguiendo el mismo criterio aquí expuesto. Aun cuando la mortalidad es un fenómeno que se va moviendo por lo general lentamente en el tiempo y que los niveles pueden variar de contexto a contexto, es verdad que los patrones son sistemáticos en muchos países del mundo. Es meritorio recalcar que esta es una primera aproximación a resultados derivados de la aplicación del modelo HP y que también es factible realizar pronósticos de la tendencia, es decir de la Edad máxima estimada a partir de propuestas ya existentes en torno al suavizamiento controlado.

7. Referencias

Alba, E. y Gómez, S. (2012) A Bayesian Approach to the Hodrick-Prescott Filter. *Realidad, Datos y Espacio, Revista Internacional de Estadística y Geografía*, 3(3): 32-47.

Carriere, J. (1992). Parametric Models for Life Tables. *Transactions of Society of Actuaries*, 44: 77-99.

Congdon, P. (1993). Statistical graduation in local demographic analysis and projection. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 156: 237-270.

Cortés-Toto, D., Guerrero, V.M. y Reyes, H. (en prensa) Trend smoothness achieved by Penalized Least Squares with the smoothing parameter chosen by optimality criteria. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*.

Debón, A., Montes, F. y Sala, R. (2006). A Comparison of Nonparametric Methods in the Graduation of Mortality: Application to Data from the Valencia Region (Spain). *International Statistical Review*, 74(2): 215-233.

Dellaportas, P., Smith, A. y Stavropoulos, P. (2001). Bayesian analysis of mortality data. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 164: 275-291.

De Moivre, A. (1725). In Annuities on Lives, *H. & S*. London, 3-125.

Felipe, A., Guillen, M. y Pérez-Marín, A. (2002). Recent mortality trends in the spanish population. *British Actuarial Journal*, 8: 757-786.

Forfar, D. (2006). Mortality Laws. *Encyclopedia of Actuarial Science* 2.

Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of deterrmining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of Royal Society, (Series A),* 115: 513–583; *H. & S*. 2:121-191.

Gompertz, B. (1860). On one uniform law of mortality from birth to extreme old age and on the law of sickness, presented to International statistical congress 1860 and reproduced in 1871. *Journal of the Institute of Actuaries,* 16: 329-344.

Gompertz, B. (1862). *Philosophical Transactions of Royal Society (Series A),* 152: 511-559.

Guerrero, V. M. (2008). Estimating trends with percentage of smoothness chosen by the user. *International Statistical Review,* 76(2), 187-202.

Guerrero, V. M. y Eliud Silva. (2015). Smoothing a Time Series by Segments of the Data Range. *Communications in Statistics - Theory and Methods,* 44(21): 4568-4585.

Hartmann M. (1987). Past and Recent Attemps to Model Mortality at All Ages. *Journal of Official Statistics*, 3: 19-36.

Heligman, L. y Pollard, J. (1980). The Age Pattern of Mortality. *Journal of the Institute of Actuaries,* 107: 49-80*.*

Hodrick, R. y Precott, E. (1997). Postwar U.S. business cycles: An empirical investigation. *J. Money Credit Bank*, 29: 1-16.

Jos, I. (2014). Estimating the Mortality of the Philippines and some Southaest Asian Countries Using the Heligman-Pollard Model. Presented at the DSLU Research Congress 2014, De La Salle University, Manila Philippines, March 6-8.

Irwanati, R. (2008). Expanding an Abridged Life Table Using the Heligman-Pollard Model. *MATEMATIKA,* 24(1): 1-10.

Kaiser, R. y Maravall, A. (2001). *Measuring Business cycles in Economic Time Series*. Lecture Notes in Statistics, 154, New York: Springer – Verlag.

Knorr, F. (1984). Multidimensional Whittaker-Henderson Graduation. *Transactions of Society of Actuaries* 36.

Kostaki, A. (1991). The Heligman-Pollard Formula as a Tool for Expanding an Abridged Life Table. *Journal of Oficial Statistics*, 7: 311-323.

Makeham, W. (1867). On the law of mortality Journal of the Institute of Actuaries 8, 301–310; *Journal of the Institute of Actuaries,* 13: 325–358; *H. & S*., 2: 324–334 y 8: 73-108.

Makeham, W. (1890). On the further development of Gompertz's law, *Journal of the Institute of Actuaries* 28, 152–159, 185–192, 316-332.

Mendoza, M., Madrigal, A., y Gutierrez-Peña, E. (2000). Predictive Mortality Graduation and the Value At Risk A Bayesian Approach. Documento de trabajo DE-C01.5, ITAM, México.

Nocon, A. y William F. (2012). An extension of the Whittaker–Henderson method of graduation. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1: 70-79.

Ovin, A. y Silva, E. (2016a). Measuring the induced smoothness in the application of the Heligman and Pollard (HP) model with a smoothness index. Presentado en 9th World Congress in Probability and Statistics, Toronto, Ontario, Canada.

Ovin, A. y Silva, E. (2016b). Aproximación del Modelo de Heligman y Pollard a través de una propuesta no paramétrica. Presentado en XIII Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México, "Dinámicas de población y desigualdad", celebrado en la Universidad Nacional Autónoma de México.

Sharrow, D., Clark. S., Collinson, M., Kahn, K y Tollman, S. (2013). The Age of Increases in Mortality Affected by HIV: Bayesian fit of the Heligman-Pollard Model to data from the Agincourt HDSS field site in rural northeast South Africa. *Demographic Research*, 29 (39): 1039-1096.

Syahmi, M., Mazlynda M., Suhaylah, Y. y Yazis, M. (2015). Expanding Abridge Life Table by Using Heligman Pollard Method: Malaysian Experience 2010-2013. *International Journal of Business and Social Science* 6(7): 133-138.

Thiele, P.N. (1871). On a mathematical formula to express the rate of mortality throughout the whole of life. *Journal of the Institute of Actuaries,* 16: 313-329.

Vargas, K. (2014). Cálculo de la edad máxima estimada de la tabla de mortalidad mexicana CNSF 2000-I, su importancia y sus aplicaciones. Trabajo presentado para el XXI Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas 2014 “Antonio Minzoni Consorti”. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, México.

Whittaker, E. (1923). On a new method of graduation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,* 41: 63-75.

Yuen, K. (1997). Comments on Some Parametric Models for Mortality Tables. *Journal of Actuarial Practice*, 5: 253-2.

Anexos
Código genérico en R

```
y=c(-6.354696075,
-8.160661094,
-8.628615298,
-7.867584313,
NA,
-7.740788618,
-7.625161374,
-7.215632059,
-7.494469941,
-7.279588664,
-7.531393582,
-7.608454949,
-7.125685263,
-7.051136586,
```

-7.222525466,
-6.808152292,
-6.920991469,
-6.762307676,
-6.712910348,
-6.731242903,
-6.773377732,
-6.684363299,
-6.683345203,
-6.623781979,
-6.572735833,
-6.500151287,
-6.336973546,
-6.297451984,
-6.106109201,
-6.198545573,
-6.029097178,
-5.86261605,
-5.700140932,
-5.686275349,
-5.572622275,
-5.493523721,
-5.417462626,
-5.399672453,
-5.342734315,
-5.134066835,
-5.212026206,
-4.910675475,
-4.858957693,
-4.856911569,
-4.845460239,
-4.691432513,
-4.594643274,
-4.497914872,
-4.377063183,
-4.447910379,
-4.44855785,
-4.179004487,
-4.307189652,
-4.162422327,
-4.021370202,
-4.102163378,
-4.007564039,
-3.838045958,
-3.90978223,
-3.835674764,
-2.73532538,
-3.734734913,
-3.56836254,
-3.652087507,
-3.720553349,
-3.708137271,
-3.494944328,
-3.425384607,
-3.623395604,
-3.251121388,

```
-3.515105334,
-3.395626337,
-3.167292773,
-4.19532048,
-2.088217027,
-2.865492162,
-3.041945117,
-2.715955381,
-2.960752555,
-3.271579888,
-3.112032729,
-2.628800829,
-2.517696473,
-2.772588722,
-3.005682604,
-1.897119985,
-3.060270795,
-1.945910149,
0)

mean(y, na.rm=TRUE)

n=length(y)
t<-seq(1,n-1,by=1)

x2=t
y2=y#[1:71]

library(pspline) #load the package containing the smooth.Pspline function

# method = 1 uses the value supplied for spar #descartado.
# method = 2 adjusts spar so that the degrees of freedom is equal to df.
# method = 3 adjusts spar so that the generalized cross-validation criterion is minimized.
# method = 4 adjusts spar so that the ordinary crossvalidation criterion is minimized.

y2 <- na.omit(y2)

fit <- smooth.Pspline(x2,y2, method=3)
fit
fit$spar
fit$df

lambdar2=fit$spar

K2=diag(n-1)
K2=diff(diff(K2))
Ysr2=solve(diag(1,n-1)+lambdar2*t(K2)%*%K2)%*%y2

df2 <- sum(diag(solve(diag(1,n-1)+lambdar2*t(K2)%*%K2)))
df2
SUA2<- 1-(df2/(n-1))
SUA2

windows()
plot(x2, y2, xlab="Edades", ylab="log(qx)", cex=1.0,pch=20, col="red", type="p") #plot data poin
lines(x2, Ysr2, xlab=" ", ylab=" ",type="l",col="red",lwd=2) #
```

Código genérico en Mathematica

```
Manipulate[
n=Dimensions[yo][[1]];
l=a;
i=IdentityMatrix[n];
k2=Differences[i,2];
k2tk2=Transpose[k2].k2;
lb=Table[l,{i,n}];
t=N[Inverse[i+lb*k2tk2]].Log[yo];
tt=Partition[Flatten[Table[{{i+14},t[[i]]},{i,n}]],2];
yot=Partition[Flatten[Table[{{i+14},Log[yo][[i]]},{i,n}]],2];
yht1=Partition[Flatten[Table[{{i+14},Log[yh1][[i]]},{i,n}]],2];
yht2=Partition[Flatten[Table[{{i+14},Log[yh2][[i]]},{i,n}]],2];
yht3=Partition[Flatten[Table[{{i+14},Log[yh3][[i]]},{i,n}]],2];
yht4=Partition[Flatten[Table[{{i+14},Log[yh4][[i]]},{i,n}]],2];
s=N[1-Tr[Inverse[i+lb*k2tk2]]/n,2];

dvr=N[Diagonal[Inverse[i+lb*k2tk2]]^.5];
yis=t+dvr*1.96;
yii=t-dvr*1.96;

yist=Partition[Flatten[Table[{{i+11},yis[[i]]},{i,n}]],2];
yiit=Partition[Flatten[Table[{{i+11},yii[[i]]},{i,n}]],2];

(*Selección de la serie de mortalidad*)
ListPlot[{tt,yot,yht7,yist,yiit},

]
{{a,.1,"λ"},0,100]


(* Funcion de pérdida *)
d11[x_]:=Total[((1-N[Inverse[Table[x,{j,n}]*k2tk2+i].Log[yo]]/Log[yh2])^2)[[13;;n]]];
e11=Partition[Flatten[Table[{h,d11[h]},{h,0,max12,.1}]],2];

d12[x_]:=Total[((Log[Log[1-N[Inverse[Table[x,{j,n}]*k2tk2+i].yo]]/Log[1-yh]])^2)[[13;;n]]];
e12=Partition[Flatten[Table[{h,d12[h]},{h,0,max12,.1}]],2];


(* encontrar  mínimo*)
maxm=1000;stpm=10;minm=0;
MinimalBy[Table[{h,d11[h]},{h,minm,maxm,stpm}],Last
```